# 2 Grundbegriffe der Mengenlehre

## 2.1 Mengen und Operationen auf Mengen

Moderne Mengentheorie wird in Form eines axiomatischen Kalküls betrieben. Dieser Ansatz hat aber den Nachteil, daß einfache inhaltliche Fragen oft durch einen technisch komplizierten Apparat verdeckt werden. Wir werden uns deshalb auf die Entwicklung einer "naiven" Mengenlehre beschränken, die als sprachliches Werkzeug für die nachfolgenden Teile der Vorlesung völlig ausreichend ist.
Nach Georg Cantor ist eine *Menge* "eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen".
Der Sachverhalt, dass ein Objekt $a$ Element einer Menge $A$ ist, wird durch $a \in A$ dargestellt, anderenfalls schreibt man $a \notin A$. Zwei Mengen $A$ und $B$ sind *gleich*, wenn sie die gleichen Elemente besitzen, d.h. wenn für alle $a$ gilt: $a \in A$ dann und nur dann, wenn $a \in B$.

**Darstellungen von Mengen**

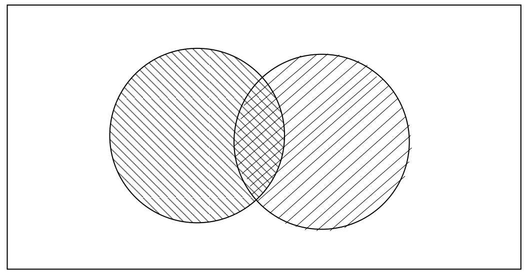
a) Mengen können durch *Auflistung ihrer Elemente* in geschweiften Klammern dargestellt werden. Das betrifft insbesondere endliche Mengen, wie z.B. $A = \{2, 3, 5, 7\}$ oder $B = \{rot, gelb, blau\}$. Dabei ist die Reihenfolge der Elemente in der Auflistung ohne Bedeutung. Auch die Mehrfachnennung von Elementen ist erlaubt (sollte aber zur Vermeidung von Missverständnissen möglichst vermieden werden), sie hat aber nur Einfluss auf die Darstellung der Menge und nicht auf die Menge selbst, z.B. $\{2, 3, 5, 7\} = \{5, 7, 3, 2, 2, 5, 2\}$.
Wir vereinbaren, dass auch unendliche Mengen durch Auflistung dargestellt werden können, sofern dies unmissverständlich ist, wie z.B. $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ für die natürlichen Zahlen oder $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ für die positiven, geraden Zahlen.

b) Die in der Mathematik gebräuchlichste Darstellungsform von Mengen beruht auf dem sogenannten *Abstraktionsprinzip*, nach dem man Mengen – im Sinne der Cantorschen Definition – durch wohlbestimmte Eigenschaften definieren kann. Dazu werden Prädikate $P(x)$ über einem festgelegten Individuenbereich für $x$ benutzt. Dann wird mit $\{x \mid P(x)\}$ oder (wenn der Bereich $B$ explizit genannt werden soll) mit $\{x \in B \mid P(x)\}$ die Menge bezeichnet, die sich aus allen Individuen aus dem Bereich zusammensetzt, für die $P(x)$ wahr ist. Man bezeichnet diese Darstellungsart von Mengen nach den Mathematikern Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel auch als ZF-Notation.

c) Zur Veranschaulichung können Mengen durch sogenannte *Venn–Diagramme* als Kreisscheiben oder andere Flächen in der Ebene dargestellt werden.

Oft ist es sinnvoll, den zu betrachtenden Individuenbereich generell festzulegen, z.B. wenn man nur Mengen von natürlichen Zahlen betrachten will. Ein solcher Bereich wird *Universum* genannt und allgemein mit $U$ bezeichnet. Es ist klar, dass Aussageformen über $U$ immer Teilmengen von $U$ definieren. Im folgenden Venn-Diagramm sind zwei Mengen $A$ und $B$ als Kreisflächen in dem durch das Rechteck symbolisierten

Universum $U$ dargestellt:



**Bemerkung:** In manchen Anwendungen (z.B. für die Buchstaben in einem Wort) benötigt man ein Konstrukt, in dem Elemente auch mehrfach auftreten können. In diesem Fall sprechen wir von einer *Multimenge*. Obwohl sich diese konzeptionell wesentlich von einer Menge unterscheidet, wird in der Regel die gleiche Notation verwendet, was natürlich zu Missverständnissen führen kann. Deshalb werden wir bei Verwendung von Multimengen diesen Begriff explizit nennen, anderenfalls ist immer eine Menge gemeint. Demnach sind $\{b, a, b, b\}$ und $\{a, b\}$ (ohne Zusatz) zwei identische Mengen, die Multimengen $\{b, a, b, b\}$ und $\{a, b\}$ unterscheiden sich, aber die Multimengen $\{b, a, b, b\}$ und $\{a, b, b, b\}$ sind wiederum identisch.

**Definition:** Eine Menge $A$ ist *Teilmenge* (oder *Untermenge*) einer Menge $B$ (Schreibweise $A \subseteq B$), wenn aus $a \in A$ auch $a \in B$ folgt.

Die Teilmengenrelation entspricht also einer Implikation der definierenden Prädikate. Deshalb kann man aus den Eigenschaften der logischen Implikation zwei elementare Eigenschaften der Teilmengenrelation ableiten:

- Die Mengen $A$ und $B$ sind gleich genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.
- Ist $A$ eine Teilmenge von $B$ und $B$ eine Teilmenge von $C$, dann ist auch $A$ eine Teilmenge von $C$.

Für die Grundmengen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen werden die Symbole $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ verwendet. Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Mit $\mathbb{N}^+, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+$ werden die entsprechenden Teilmengen der positiven Zahlen (echt größer als 0) bezeichnet.

**Übung:** Beschreiben Sie die folgenden Mengen in ZF-Notation!

- Die Menge $P$ aller Primzahlen und die Menge $S$ aller Zahlen, die das Produkt von zwei verschiedene Primzahlen sind.
- Die Menge $T$ aller positiven rationalen Zahlen, in deren gekürzter Darstellung im Nenner eine 2 steht.
- Die Menge $U$ aller reellen Zahlen, die echt kleiner als 3 und Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl sind.

**Definition** (Operationen auf Mengen):

- Zwei Mengen $A$ und $B$ sind *disjunkt*, wenn sie keine gemeinsamen Elemente besitzen, d.h wenn aus $a \in A$ folgt $a \notin B$.
- Die *Vereinigung* $A \cup B$ der Mengen $A$ und $B$ besteht aus allen Objekten, die Elemente von $A$ oder von $B$ sind, dh. $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$.
- Der *Durchschnitt* $A \cap B$ der Mengen $A$ und $B$ besteht aus allen Objekten, die Elemente von $A$ und von $B$ sind, dh. $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$.
- Die *Differenz* $A \setminus B$ der Mengen $A$ und $B$ besteht aus allen Objekten, die Elemente von $A$, aber nicht von $B$ sind, dh. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$.
- Die Vereingung der Mengendifferenzen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ wird die *symmetrische Differenz* aus $A$ und $B$ genannt und mit $A \oplus B$ oder auch mit $A \div B$ bezeichnet.
- Die Menge, die kein Element enthält, wird *leere Menge* genannt und mit $\emptyset$ bezeichnet.
- Ist $A$ Teilmenge eines festgelegten Universums $U$, dann ist das *Komplement* von $A$ definiert als $U \setminus A$. Es wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen Teilmengenbeziehungen sowie Operationen auf Mengen und den entsprechenden logischen Operationen wird noch einmal in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

| Mengenlehre | | Logik | |
|---|---|---|---|
| Gleichheit | $A = B$ | $x \in A \leftrightarrow x \in B$ | Äquivalenz |
| Inklusion | $A \subseteq B$ | $x \in A \rightarrow x \in B$ | Implikation |
| Vereinigung | $A \cup B$ | $x \in A \vee x \in B$ | Disjunktion |
| Durchschnitt | $A \cap B$ | $x \in A \wedge x \in B$ | Konjunktion |
| Komplement | $A = \overline{B}$ | $x \in A \leftrightarrow \neg(x \in B)$ | Negation |
| symmetr. Differenz | $A \oplus B = A \div B$ | $x \in A \oplus x \in B$ | Antivalenz |
| Universum | $U$ | 1 | wahr |
| leere Menge | $\emptyset$ | 0 | falsch |

Damit können auch - wie im nachfolgenden Satz formuliert - die bekannten Gesetze der Aussagenlogik in die Mengenlehre übertragen werden.

**Satz:** Folgende Identitäten gelten für alle Untermengen $A, B, C$ eines Universums $U$:

| | |
|---|---|
| Kommutativität: | $A \cup B = B \cup A$ |
| | $A \cap B = B \cap A$ |
| Assoziativität: | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ |
| | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| Distributivität: | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| Idempotenz: | $A \cup A = A$ |
| | $A \cap A = A$ |
| Dominanz: | $A \cup U = U$ |
| | $A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| Identität: | $A \cup \emptyset = A$ |
| | $A \cap U = A$ |
| Absorption: | $A \cup (A \cap B) = A$ |
| | $A \cap (A \cup B) = A$ |
| De Morgan'sche Regel: | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |
| | $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ |
| Komplementierung: | $A \cup \overline{A} = U$ |
| | $A \cap \overline{A} = \emptyset$ |
| | $\overline{(\overline{A})} = A$ |
| | $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ |

Auf Grund der Assoziativität kann man bei der Vereinigung (bzw. beim Durchschnitt) von $n$ Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ auf Klammerungen verzichten und die folgende Schreibweise nutzen:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

**Definition:** Ist $I$ eine beliebige Menge und ist für jedes $i \in I$ eine Menge $A_i$ gegeben, dann nennen wir die Menge dieser Mengen eine *Mengenfamilie über der Indexmenge* $I$ und bezeichnen sie durch $\{A_i \mid i \in I\}$. Die Vereinigung (bzw. der Durchschnitt) dieser Mengenfamilie ist definiert durch

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{es gibt ein } i \in I, \text{ so dass } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{für alle } i \in I, \text{ gilt } x \in A_i\}$$

**Übung:** Bestimmen Sie für die folgende Mengenfamilie die Vereinigung und den Durchschnitt!

$$\{A_n \mid n \in \mathbb{N}^+\} \text{ mit } A_n = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

**Definition:** Eine Familie $\{A_i \mid i \in I\}$ von nichtleeren Mengen wird *Partition* oder *Zerlegung* einer Menge $A$ genannt, falls

1. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$

2. Für beliebige, voneinander verschiedene $i, j \in I$ gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$.

**Definition:** Ist $A$ eine Menge, dann wird die Menge aller Untermengen von $A$ die *Potenzmenge* von $A$ genannt und mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet.

**Satz:** Ist $A$ eine endliche, $n$-elementige Menge, dann hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ genau $2^n$ Elemente.

**Übung:** Beschreiben Sie die Menge $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \setminus \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ durch Auflistung.

## 2.2 Das Kartesische Produkt und Relationen

**Definition:** Ein *geordnetes Paar* $(a, b)$ ist eine (den Objekten $a$ und $b$ zugeordnetes) Konstrukt mit der folgenden Eigenschaft: $(a, b) = (a', b')$ genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

**Definition:** Das *kartesische Produkt* $A \times B$ von zwei Mengen $A$ und $B$ ist definiert als die Menge aller geordneten Paare $(a, b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$, als Formel:

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \,\}$$

Beispiel: $\{1, 2, 3\} \times \{2, 4\} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

Wie dieses Beispiel deutlich suggeriert, hat bei zwei endlichen Mengen $A$ und $B$ mit $m$ und $n$ Elementen das kartesische Produkt $A \times B$ genau $m \cdot n$ Elemente.

**Definition:** Eine Untermenge $R$ eines kartesischen Produkts $A \times B$ wird *binäre Relation* oder kurz *Relation* zwischen $A$ und $B$ genannt. Für $(a, b) \in R$ kann auch $a\,R\,b$ geschrieben werden. In diesem Fall sagt man, dass $a$ in Relation zu $b$ steht.
Eine Untermenge $R$ eines kartesischen Produkts der Form $A \times A$ wird (binäre) Relation auf $A$ (oder über $A$) genannt.

Die ersten drei Relationen in den folgenden Beispielen sind generisch, d.h. man kann sie über beliebigen Grundmengen betrachten:

- $\emptyset \subseteq A \times B$ wird *leere Relation* genannt.
- $A \times B$ wird *Allrelation* zwischen $A$ und $B$ genannt.
- Die Menge $\{(a, a) \mid a \in A\}$ wird die *identische Relation* über $A$ genannt und kurz mit $Id_A$ bezeichnet.
- Die Teilbarkeitsrelation $\mid$ kann man als Relation über den natürlichen Zahlen (aber auch über den ganzen Zahlen) betrachten. Wie bereits besprochen, ist diese Relation wie folgt definiert:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{N} \quad (\, a \,|\, b \Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} \qquad b = a \cdot c)$$

- Über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kennen wir eine Reihe von Vergleichsrelationen, nämlich $<, \leq, \geq, >$.

- Ist $A$ die Menge aller Informatikstudenten an der FU Berlin und $B$ die Menge aller Pflichtmodule im Informatikstudium, dann ist $R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{Student } a \text{ hat das Modul } b \text{ abgeschlossen }\}$ eine binäre Relation.

- Jede Abbildung $f : A \longrightarrow B$ kann auch als binäre Relation $f = \{(a, b) \in A \times B \mid a \in A \wedge b = f(a)\}$ gesehen werden.

Zur Darstellung von Relationen sind verschiedene Methoden gebräuchlich:

- Darstellungen in Tabellenform, bei denen für jedes $a \in A$ eine Spalte und für jedes $b \in B$ eine Zeile angelegt wird. Die Zelle in der Spalte von $a$ und der Zeile von $b$ wird mit einer 1 gefüllt, wenn $a\,R\,b$ gilt, und sonst mit einer 0. (Verwendung in relationalen Datenbanken);

- Anschauliche Darstellungen durch Diagramme in einem Rechteck;

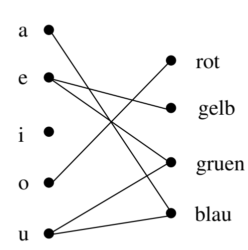
- Sogenannte bipartite Graphen, bei denen die Elemente aus $A$ und $B$ als Knoten getrennt auf zwei Seiten gezeichnet werden, wobei zwei Elemente, die zueinander in Relation stehen, durch eine Kante (Verbindungsstrecke) verbunden werden.

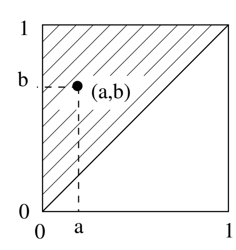
**Beispiel:** Die Relation $R$ zwischen der Vokalmenge $A = \{a, e, i, o, u\}$ und der Wortmenge $B = \{rot, gelb, gruen, blau\}$ gibt an, welcher Vokal in welchem Wort vorkommt:

$$R = \{(a, blau), (e, gelb), (e, gruen), (o, rot), (u, gruen), (u, blau)\}$$

In der folgenden Abbildung sieht man die Relation $R$ in Tabellenform (links) und als bipartiter Graph (Mitte). Auf der rechten Seite ist die Relation $\leq$ über dem reellen Intervall $[0, 1]$ als Diagramm dargestellt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *blau* | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| *gruen* | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| *gelb* | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| *rot* | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | *a* | *e* | *i* | *o* | *u* |




**Übung:**
1) Aus wie vielen Paaren bestehen die Teilbarkeitsrelation $\mid$ bzw. die Kleiner-Gleich-Relation $\leq$ über der Menge $\{1, 2, \ldots, 12\}$?
2) Wie viele Relationen zwischen zwei endlichen Mengen $A$ und $B$ mit $m$ bzw. $n$ Elementen gibt es?

**Relationsoperationen**

1. Sind $R$ und $R'$ Relationen zwischen $A$ und $B$, dann sind auch die Vereinigung $R \cup R'$, der Durchschnitt $R \cap R'$ sowie das Komplement $\overline{R} = (A \times B) \setminus R$ Relationen zwischen $A$ und $B$.

2. Die zu einer Relation $R \subseteq A \times B$ *inverse Relation* $R^{-1} \subseteq B \times A$ ist definiert durch $R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$.

3. Die *Verkettung* oder *Komposition* $R \circ S$ von zwei Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ ist definiert durch

$$\{(a,c) \in A \times C \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a,b) \in R \text{ und } (b,c) \in S\}.$$

**Beispiele:**

1) Wir betrachten die Vergleichsrelationen $<$, $\leq$, $\geq$ und die identische Relation $=$ über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Offensichtlich ist die Vereinigung der Relationen $<$ und $=$ die Relation $\leq$. Das Komplement der Relation $<$ ist die Relation $\geq$. Der Durchschnitt der Relationen $\leq$ und $\geq$ ist die identische Relation $=$. Die zu $\leq$ inverse Relation ist $\geq$, die identische Relation ist zu sich selbst invers.

2) Sei $M$ die Menge aller Menschen und $R \subseteq M \times M$ "Elternrelation", also $a\,R\,b$, falls $a$ Vater oder Mutter von $b$ ist. Dann kann man die inverse Relation $R^{-1}$ sowie die Verkettungen $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$ und $R^{-1} \circ R$ wie folgt charakterisieren:

- $a\,R^{-1}\,b$, falls $a$ Kind von $b$ ist,
- $a\,R \circ R\,b$, falls $a$ Großvater oder Großmutter von $b$ ist,
- $a\,R \circ R^{-1}\,b$, falls $a$ und $b$ ein gemeinsames Kind haben oder falls $a = b$ und $a$ hat ein Kind,
- $a\,R^{-1} \circ R\,b$, falls $a = b$ oder $a$ und $b$ Geschwister oder Halbgeschwister sind.

**Eigenschaften von Relationen über Mengen**

**Definition:** Sei $R$ eine Relation über $A$.

- $R$ ist *reflexiv*, falls für jedes $a \in A$ gilt, dass $a\,R\,a$, d.h. $Id_A \subseteq R$.
- $R$ ist *symmetrisch*, falls aus $a\,R\,b$ folgt, dass $b\,R\,a$ , d.h. $R^{-1} \subseteq R$.
- $R$ ist *transitiv*, falls aus $a\,R\,b$ und $b\,R\,c$ folgt, dass $a\,R\,c$, d.h. $R \circ R \subseteq R$.
- $R$ ist *antisymmetrisch*, falls aus $a\,R\,b$ und $b\,R\,a$ die Gleichheit von $a$ und $b$ folgt, d.h. $R \cap R^{-1} \subseteq Id_A$.
- $R$ ist *asymmetrisch*, falls aus $a\,R\,b$ folgt, dass $(b,a) \notin R$, d.h. $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

**Beispiele:**

1) Die Vergleichsrelationen $\leq$ und $\geq$ sind über $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Die Relationen $<$ und $>$ sind nicht reflexiv, aber transitiv, antisymmetrisch und asymmetrisch.

2) Die oben definierte Teilbarkeitsrelation ist reflexiv und transitiv über $\mathbb{N}$ und über $\mathbb{Z}$. Sie ist antisymmetrisch über $\mathbb{N}$, aber als Relation über $\mathbb{Z}$ ist sie nicht antisymmetrisch, denn $1|-1$ und $-1|1$, aber $1 \neq -1$.

**Übung:** Wie viele symmetrische und wie viele reflexiv-symmetrische Relationen gibt es über einer $n$-elementigen Menge $A$?

## 2.3 Äquivalenzrelationen

**Definition:** Eine Relation über einer Menge $A$ wird *Äquivalenzrelation* genannt, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

**Beispiele:**
1) Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $R$ definiert durch $a\,R\,b$, genau dann wenn $a$ und $b$ beim Teilen durch 5 den gleichen Rest haben. Dann ist $R$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$.
2) Die logische Äquivalenz $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Booleschen Formeln.
3) Die Kongruenz von Dreiecken ist eine Äquivalenzrelation.

**Definition:** Ist $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und ist $a \in A$, dann nennt man die Menge $\{x \in A \mid xRa\}$ die *Äquivalenzklasse* von $a$ (bezüglich $R$). Sie wird mit $[a]_R$ oder auch mit $a/_R$ bezeichnet. Ein Element einer Äquivalenzklasse wird *Repräsentant* dieser Klasse genannt.

**Lemma:** Sei $R$ eine Äquivalenzrelation, dann sind zwei Äquivalenzklassen $[a]_R$ und $[b]_R$ entweder gleich oder disjunkt. Sie sind genau dann gleich, wenn $a\,R\,b$ gilt.

Ein formaler Beweis dieses Lemmas wird später in der Vorlesung vorgestellt.

**Übung:** Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer drei- bzw. vierelementigen Menge $A$? Klassifizieren Sie dazu die Äquivalenzrelationen nach Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Die erste Aussage des folgenden Satzes kann als einfache Schlussfolgerung aus dem Lemma abgeleitet werden.

**Satz:** Ist $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation, dann bildet die Menge aller Äquivalenzklassen eine Partition von $A$. Umgekehrt, ist eine Partition $\{A_i \mid i \in I\}$ von $A$ gegeben, dann ist die durch

$$a\,R\,b \iff \exists i \in I \qquad a \in A_i \ \wedge \ b \in A_i$$

definierte Relation $R$ eine Äquivalenzrelation.

**Definition:** Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Eine Untermenge von $A$ wird *Repräsentantensystem* für $R$ genannt, wenn sie aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält.

**Beispiele:**

1) Wir betrachten noch einmal die Relation $R$ über $\mathbb{N}$, die zwei Zahlen $a$ und $b$ genau dann in Beziehung setzt, wenn sie beim Teilen durch 5 den gleichen Rest haben. Dann werden die einzelnen Äquivalenzklassen jeweils durch die Zahlen mit gleichem Rest gebildet, was zu der folgenden Partition von $\mathbb{N}$ führt:

$$\{\{0, 5, 10 \ldots\}, \{1, 6, 11, \ldots\}, \{2, 7, 12, \ldots\}, \{3, 8, 13, \ldots\}, \{4, 9, 14, \ldots\}\}$$

Offensichtlich bilden die Reste {0,1,2,3,4} ein Repräsentantensystem (das sogenannte Standard–Repräsentantensystem), aber auch die Menge $\{3, 10, 7, 21, 9\}$ ist ein Repräsentantensystem.

2) Natürlich hätten wir an Stelle der 5 auch jede andere Zahl $n \in \mathbb{N}^+$ als Teiler wählen können und an Stelle von $\mathbb{N}$ wäre auch $\mathbb{Z}$ als Grundmenge geeignet gewesen. Man bezeichnet die dadurch entstehenden Relationen als Kongruenzen modulo $n$ und schreibt für zwei Zahlen $a, b$, die beim Teilen durch $n$ den gleichen Rest haben auch $a \equiv b \pmod n$. In diesem Fall bilden die möglichen Reste $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ das Standard–Repräsentantensystem.

3) Wir betrachten $\mathbb{R}$ (oder auch $\mathbb{Q}$) als Grundmenge und definieren eine Äquivalenzrelation $\sim \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch: $r \sim s \overset{def}{\Leftrightarrow} r - s \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie zunächst als kleine Übung, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und dass die reellen Zahlen aus dem halboffenen Intervall $[0, 1)$ ein Repräsentantensystem bilden. Dann sollten wir uns die Frage stellen, ob man eine gemeinsame Grundidee in diesen drei Beispielen erkennen kann.

**Satz:** Die identische Relation $Id_A$ und die Allrelation $A \times A$ sind Äquivalenzrelationen. Sind $R$ und $R'$ Äquivalenzrelationen auf $A$, dann ist auch $R \cap R'$ eine Äquivalenzrelation auf $A$.

**Achtung:** Die letzte Aussage gilt im Allgemeinen nicht für Vereinigungen. Als Gegenbeispiel kann man die Kongruenzrelationen modulo 2 und modulo 3 betrachten. Offensichtlich ist das Paar $(1, 6)$ nicht in der Vereinigung, denn 1 und 6 haben sowohl beim Teilen durch 2 als auch beim Teilen durch 3 verschiedene Reste. Andererseits sind die Paare $(1, 4)$ - gleicher Rest beim Teilen durch 3 - und $(4, 6)$ - gleicher Rest beim Teilen durch 2 - in der Relationsvereinigung. Folglich ist diese Vereinigung nicht transitiv.

Allgemein kann jede Relation $R \subseteq A \times A$ durch die folgenden 3 Schritte zu einer Äquivalenzrelation erweitert werden:

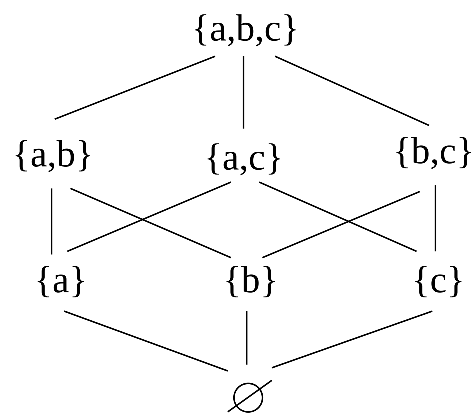
1) reflexiver Abschluss: $R_r = R \cup Id_A$
2) symmetr. Abschluss: $R_{rs} = R_r \cup R_r^{-1} = R \cup R^{-1} \cup Id_A$
3) transitiver Abschluss: $R_{rst} = R_{rs} \cup R_{rs} \circ R_{rs} \cup R_{rs} \circ R_{rs} \circ R_{rs} \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{rs}^i$

wobei $R_{rs}^i$ die i-fache Verkettung von $R_{rs}$ ist.

## 2.4 Ordnungsrelationen

**Definition:** Eine Relation $R$ über einer Menge $A$, die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist, wird *Halbordnungsrelation* oder auch *partielle Ordnungsrelation* genannt. Das Paar $(A, R)$ nennt man eine *halb– (partiell) geordnete Menge* oder kurz *poset* als Abkürzung für partially ordered set.

Endliche, halbgeordnete Mengen werden oft durch sogenannte *Hasse–Diagramme* dargestellt. Dabei werden die Elemente der Menge als Punkte in der Ebene gezeichnet, wobei direkte Nachfolger jeweils höher als ihre Vorgänger liegen und mit ihnen durch ein Liniensegment verbunden sind. Formal betrachtet beschreibt das Hasse–Diagramm eines Posets $(A, R)$ die kleinste Unterrelation von $R$, deren reflexiver und transitiver Abschluss $R$ ergibt. Die folgende Abbildung zeigt das Hasse–Diagramm der Potenzmenge einer 3–elementigen Menge $M = \{a, b, c\}$:




**Beispiele:**

1) Für jede beliebige Menge $M$ ist $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ eine halbgeordnete Menge.

2) Die Teilbarkeitsrelation $|$ ist eine Halbordnungsrelation in der Menge der positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}^+$.

3) In der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist die Relation $\leq$ eine Halbordnungsrelation.

4) Die Menge der Wörter einer Sprache wird durch die “lexikographische Ordnung” geordnet.

5) Sei $P$ Menge von Punkten in der Ebene. Jeder Punkt $p \in P$ ist als Koordinatenpaar $(p_x, p_y)$ gegeben. Dann ist die durch

$$p = (p_x, p_y) \preceq q = (q_x, q_y) \overset{def}{\Longleftrightarrow} p_x \leq q_x \wedge p_y \leq q_y$$

definierte Relation eine partielle Ordnungsrelation auf $P$.

Zwei Begriffe sind eng verwandt mit partiellen Ordnungsrelationen: totale Ordnungsrelationen und strikte (oder strenge) Ordnungsrelationen. Diese Begriffe werden durch die folgenden Definitionen genauer erläutert.

**Definition:** Zwei Elemente $a$ und $b$ einer halbgeordneten Menge $(A, R)$ nennt man *vergleichbar*, falls $a\,R\,b$ oder $b\,R\,a$ gilt. Anderenfalls nennt man sie unvergleichbar. Eine Halbordnungsrelation $R$ in einer Menge $A$ wird *totale* (oder auch *lineare*) *Ordnungsrelation* genannt, wenn jedes Paar von Elementen vergleichbar ist.

**Beispiele:** In den obigen Beispielen sind die Relationen aus 1) und 2) keine totalen Ordnungsrelationen. So sind für $M = \{a, b, c\}$ die Untermengen $\{a\}$ und $\{c\}$ unvergleichbar bezüglich der Teilmengenrelation. Die Zahlen 6 und 20 sind unvergleichbar bezüglich der Teilbarkeitsrelation. Dagegen ist $\leq$ eine totale Ordnungsrelation für die reellen Zahlen. Die lexikographische Ordnung ist eine totale Ordnungsrelation.

**Bemerkung:** Taucht in der Literatur der Begriff "Ordnungsrelation" auf, so ist darunter in der Regel eine "Halbordnungsrelation" zu verstehen.

**Definition:** Eine Relation $R$ über einer Menge $A$ wird *strikte* oder *strenge Ordnungsrelation* genannt, wenn sie transitiv und asymmetrisch ist.

Typische Beispiele für strikte Ordnungsrelationen sind die "echt–kleiner"–Relation $<$ oder die Relation, ein echter Teiler zu sein. Generell kann man aus jeder Halbordnungsrelation $R$ über einer Menge $A$ eine strikte Ordnungsrelation $R' = R \setminus Id_A$ ableiten und umgekehrt kann aus jeder strikten Ordnungsrelation durch Vereinigung mit $Id_A$ eine Halbordnungsrelation gemacht werden.

# 3 Funktionen

## 3.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

**Definition:** Unter einer *Funktion* (oder *Abbildung*) $f$ von einer Menge $A$ in eine Menge $B$ versteht man eine Zuordnung, bei der jedem Element aus $A$ ein eindeutig bestimmtes Element aus $B$ entspricht. Formal kann $f$ als eine Relation zwischen $A$ und $B$ charakterisiert werden, so dass für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert mit $a\,f\,b$. Als übliche Schreibweise verwenden wir $f : A \longrightarrow B$ um auszudrücken, dass $f$ eine Funktion von $A$ nach $B$ ist, und $f(a) = b$, um auszudrücken, dass dem Element $a$ durch die Funktion $f$ der Wert $b$ zugeordnet wird. Die Menge $A$ wird *Definitionsbereich* von $f$ und die Menge $B$ wird *Wertebereich* oder *Wertevorrat* von $f$ genannt.

**Definition:** Ist $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion, $M \subseteq A$ und $N \subseteq B$, dann nennt man die Menge

$f(M) = \{y \in B \mid \text{es gibt ein } x \in M \text{ mit } f(x) = y\}$ das *Bild* von $M$ unter $f$

und die Menge

$f^{-1}(N) = \{x \in A \mid f(x) \in N\}$ das *vollständige Urbild* von $N$ unter $f$.

**Definition:**

- Eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ heißt *surjektiv*, falls jedes Element von $B$ im Bild von $A$ auftritt, d.h. wenn $f(A) = B$.
- Eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ heißt *injektiv* oder *eineindeutig*, falls je zwei verschiedene Elemente aus $A$ auch verschiedene Bilder haben, d.h. wenn aus $f(a) = f(a')$ die Gleichheit von $a$ und $a'$ folgt.
- Eine Funktion wird *bijektiv* genannt, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

**Beispiel:** Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 + 1$. Als Funktion von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ weder injektiv noch surjektiv.
Durch Einschränkungen von Definitions– und/oder Wertebereich kann man diese Eigenschaften erzwingen:

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow [1, \infty)$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv
- $f : [0, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$ ist bijektiv.

Betrachtet man eine Funktion $g : A \longrightarrow B$ als Relation, dann ist die zu $g$ inverse Relation $g^{-1}$ genau dann eine Funktion, wenn $g$ bijektiv ist. In diesem Fall wird $g^{-1}$ die zu $g$ *inverse Funktion* genannt.
**Beispiel:** Wir betrachten noch einmal $f(x) = x^2 + 1$ als eine bijektive Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$. Durch äquivalentes Umformen kann man in diesem Fall die Umkehrfunktion $f^{-1} : [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ explizit angeben durch $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$.

**Definition:** Sind $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Funktionen, dann ist die Relationsverkettung $f \circ g$ eine Funktion von $A$ in $C$. Sie wird *Verknüpfung* oder *Komposition* von $f$ und $g$ genannt und durch $gf : A \longrightarrow C$ bezeichnet, wobei $gf(a) = g(f(a))$ gilt. Man beachte, dass Relationsverkettungen von links nach rechts und Funktionsverknüpfungen von rechts nach links geschrieben werden.

**Satz:** Die folgenden Fakten ergeben sich als einfache Schlussfolgerungen aus den Definitionen. Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ zwei Funktionen, dann gilt:

- Ist $f$ bijektiv, dann ist $f^{-1}f = Id_A$ und $ff^{-1} = Id_B$.
- $f$ ist genau dann injektiv, wenn eine Funktion $h : B \longrightarrow A$ existiert mit $hf = Id_A$.
- $f$ ist genau dann surjektiv, wenn eine Funktion $h : B \longrightarrow A$ existiert mit $fh = Id_B$.
- Sind $f$ und $g$ injektiv, dann ist auch $gf$ injektiv.
- Sind $f$ und $g$ surjektiv, dann ist auch $gf$ surjektiv.

- Sind $f$ und $g$ bijektiv, dann ist auch $gf$ bijektiv und es gilt $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

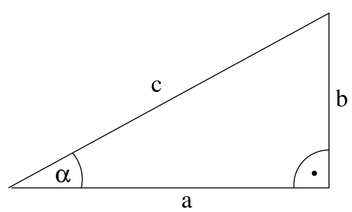
**Satz:** Jede Funktion $f : A \longrightarrow B$ induziert eine Äquivalenzrelation $\sim_f$ auf $A$ durch

$$a \sim_f b \quad \text{genau dann, wenn} \quad f(a) = f(b).$$

Diese Äquivalenzrelation wird auch *Faserung* von $A$ durch $f$ genannt.

## 3.2 Winkelfunktionen

Dieser Abschnitt ist eine reine Wiederholung von Schulstoff, der nach unserer Erfahrung häufig etwas verschüttet ist. Die bekannten Winkelfunktionen $\sin, \cos, \tan$ und $\cot$ machen Aussagen zu den Seitenverältnissen in rechtwinkligen Dreiecken in Abhängigkeit von einem (nichtrechten) Winkel $\alpha$ in dem Dreieck. Sei dabei $a$ die Länge der am Winkel $\alpha$ anliegenden Kathete (Ankathete), $b$ die Länge der dem Winkel $\alpha$ gegenüberliegende Seite (Gegenkathete) und $c$ die Länge der Hypothenuse. Dann werden die Winkelfunktionen durch folgende Seitenverhältnisse definiert:




$$\sin\alpha = \tfrac{b}{c} \qquad \cos\alpha = \tfrac{a}{c}$$

$$\tan\alpha = \tfrac{b}{a} \qquad \cot\alpha = \tfrac{a}{b}.$$

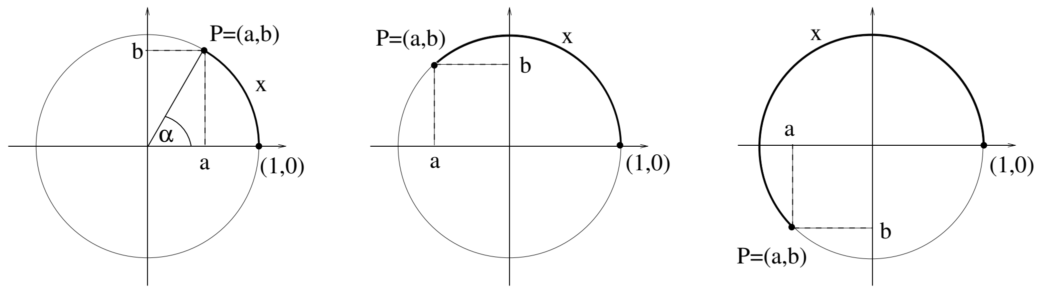
Da Skalierungen die Seitenverhältnisse nicht verändern, kann man die Betrachtung auch auf Dreiecke mit der Hypothenusenlänge $c = 1$ reduzieren. Würde man sich nur auf die Interpretation in (nicht-entarteten) rechtwinkligen Dreiecken beschränken, dann wäre der Definitionsbereich für alle vier Funktionen das offene Intervall zwischen $0°$ und $90°$ im Gradmaß bzw. zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ im Bogenmaß.
Wir werden in den weiteren Betrachtungen immer das Bogenmaß verwenden. Um es besser zu verstehen und um den Defintionsbereich der Sinus- und Cosinusfunktions auf ganz $\mathbb{R}$ ausweiten zu können, betrachten wir einen Einheitskreis (d.h. mit Radius 1) um den Koordinatenursprung in der Ebene und $(1, 0)$ als Startposition für einen Punkt, der sich auf dem Einheitskreis bewegt, wobei Drehungen gegen die Uhrzeigerrichtung positiv und in Uhrzeigerrichtung negativ gemessen werden. Man kann eine Drehung entweder durch den Winkel $\alpha$ im Gradmaß oder durch die Länge des Kreisbogenabschnitts $x$ messen, wobei man Letzteres das Bogenmaß des Winkels nennt. Da eine volle Umdrehung im Gradmaß $360°$ um im Bogenmaß $2\pi$ (Kreisumfang) ist, ergibt sich eine einfache Umrechnungsformel

$$\alpha = \frac{x \cdot 360}{2\pi} = \frac{x \cdot 180}{\pi} \quad \text{und} \quad x = \frac{2\alpha\pi}{360} = \frac{\alpha\pi}{180}.$$

Insbesondere sollte man sich die folgenden Werte einprägen:

| $\alpha$ im Gradmaß | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 180 | 270 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ im Bogenmaß | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

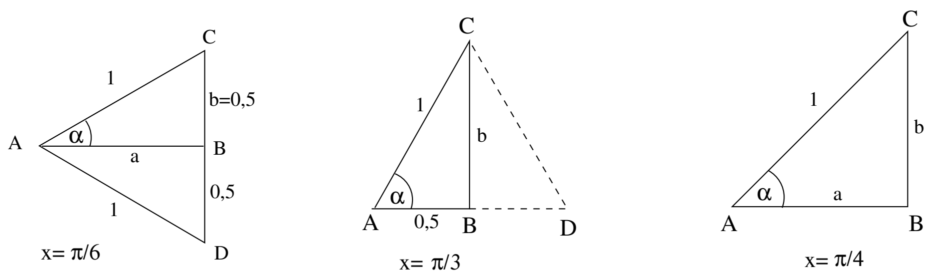
Sei $P = (a, b)$ der Punkt, den man startend von $(1, 0)$ mit dem Bogenmaß $x$ auf dem Einheitskreis erreicht, dann definiert man $\sin x = b$ und $\cos x = a$ sowie $\tan x = \frac{b}{a}$ falls $a \neq 0$ und $\cot x = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$. Die folgende Abbildung zeigt die Situationen für $x = \pi/3$, $x = 3\pi/4$ und $x = 5\pi/4$.




Da für jeden Punkt $P = (a, b)$ auf dem Einheitskreis $a^2 + b^2 = 1$ gilt, folgt daraus die bekannte Formel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Auch viele andere Identitäten lassen sich aus diesem geometrischen Ansatz ableiten:

- $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ und $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$ und $\cos(x + \pi) = -\cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ und $\sin x = \cos(x - \pi/2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Einige Werte der Winkelfunktionen kann man aus den Satz des Pythagoras und elementaren Fakten aus der Dreiecksgeometrie herleiten. In der folgenden Abbildung sind die drei Fälle mit den Winkeln $30°, 60°$ und $45°$, also $x = \pi/6$, $x = \pi/3$ und $x = \pi/4$ dargestellt.




Im ersten Fall betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit Hypothenusenlänge 1, einem Winkel $\alpha = 30°$ und den Kathetenlängen $b$ (Gegenkathete) und $a$ (Ankathete). Wir spiegeln dieses Dreieck an der Ankathete und erhalten durch Vereinigung ein Dreieck ADC, in dem alle Winkel gleich $60°$ sind. Folglich ist dieses Dreieck auch gleichseitig (Seitenlänge 1) und daraus folgt $b = \frac{1}{2}$. Jetzt nutzt man den Satz des Pythagoras mit $a^2 + b^2 = 1^2$ und erhält $a = \sqrt{1 - b^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Daraus ergibt sich

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Für den Fall $\alpha = 60^\circ$ könnte man bereits die vierte Identität aus der obigen Liste nutzen, aber wir wollen es noch einmal geometrisch lösen. Wir starten mit einem rechtwinkligen Dreieck ABC, spiegeln es an der Gegenkathete und erhalten durch Vereinigung ein gleichseitiges Dreieck $ADC$ mit Seitenlänge 1. Somit muss im ursprünglichen Dreieck $a = \frac{1}{2}$ sein. Daraus folgt $b = \sqrt{1-a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und letzlich

$$\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

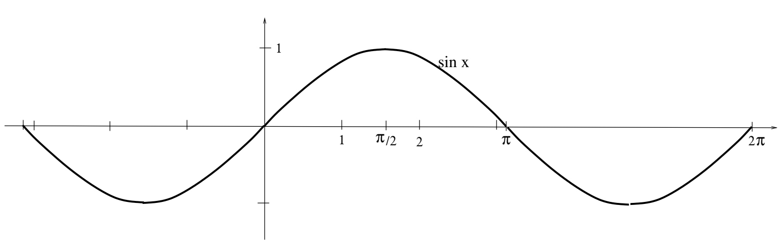
Der einfachste Fall ist $\alpha = 45^\circ$, denn dann ist das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig, also $a = b$. Daraus folgt $1 = a^2 + b^2 = 2a^2$ und $a = b = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, also

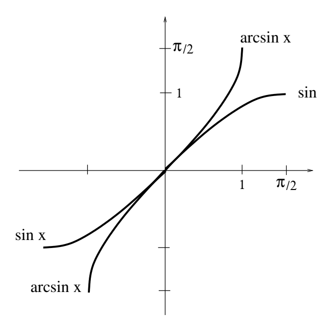
$$\sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenfassung von Werten der Winkelfunktionen, die in Übungsaufgaben häufig gebraucht werden.

| $\alpha$ im Gradmaß | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ im Bogenmaß | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | nicht def. |

Auf der linken Seite der nächsten Abbildung sieht man bekannten Verlauf der Sinuskurve. Die Sinusfunktion ist als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist weder injektiv noch surjektiv, aber durch geeignete Einschränkungen auf beiden Seiten wird die Teilfunktion $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ bijektiv. Die Umkehrfunktion ist die rechtsseitig dargestellte Arkussinusfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.




Auf ähnliche Weise kann man die Cosinusfunktion auf das Intervall $[0, \pi]$ einschränken, um eine Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ zu bekommen.

## 3.3 Exponential- und Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion $exp(x) = e^x$ ist eine Funktion, die jeder reellen Zahl $x$ den positiven reellen Wert $e^x$ zuordnet. Um sie verstehen, muss man wissen, welche Zahl sich hinter dem Symbol $e$ verbirgt und wie man $e$ in eine ganzzahlige, eine gebrochene oder sogar in eine beliebige reelle Potenz heben kann. Dahinter steht eine nicht ganz triviale Grenzwertbetrachtung, die eingehend im 3. Semester besprochen wird. Hier wollen wir nur stichpunktartig die wichtigsten Ideen nennen und uns danach einen mehr intuitiven Zugang zu dem Thema erarbeiten.

1. Die Folge $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ konvergiert. Der Grenzwert dieser Folge wird als Eulersche Zahl $e$ bezeichnet und hat den Wert $2,71828\ldots$.
2. Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ konvergiert auch gegen den Grenzwert $e$. Diesen Fakt kann man auch so lesen, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}1^k$ gegen den Wert $e^1$ konvergiert.
3. Man kann die 1 in der obigen Reihe auch durch eine beliebige reelle Zahl $x$ ersetzen und zeigen, dass auch die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$ konvergiert. Wir nennen den Grenzwert $exp(x)$.
4. Man kann weiterhin zeigen, dass die Funktion $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ stetig und streng monoton wachsend ist. Darüber hinaus gilt für beliebige reelle Zahlen $x$ und $y$ die Gleichung $exp(x+y) = exp(x)\cdot exp(y)$. Diese Gleichung ist auch als Exponentialgesetz bekannt. Alle bisher genannten Fakten werden durch Grenzwertbetrachtungen bewiesen.
5. Da die Funktion $exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$ das Exponentialgesetz erfüllt, können wir die folgenden Eigenschaften ableiten:
   $exp(2) = exp(1+1) = exp(1)\cdot exp(1) = e\cdot e = e^2$,
   $exp(3) = exp(1+2) = exp(1)\cdot exp(2) = e\cdot e^2 = e^3$ und allgemein
   $exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   Auf diese Weise wird im Nachhinein deutlich, dass die Beschreibung $exp(x) = e^x$ ihre Berechtigung hat.

Wir wollen jetzt den letzten Gedanken noch einmal mit einem beliebigen positiven, reellen Werte $a$ an Stelle von $e$ nachvollziehen:

- Die natürlichen Potenzen von $a$ werden rekursiv definiert durch
  $a^0 = 1$ als Verankerung und
  $a^{n+1} = a\cdot a^n$ als Rekursionsschritt.
  Daraus resultiert das Exponentialgesetz $a^{k+n} = a^k\cdot a^n$ für beliebige $k, n \in \mathbb{N}$.

- Wir erweitern das Potenzieren schrittweise auf ganze und rationale Potenzen wobei das Ziel darin besteht, die Gültigkeit des Exponentialgesetzes zu erhalten. Sei $z = -n$ eine negative ganze Zahl. Es gilt $-n + n = 0$ und die formale Anwendung des Exponentialgesetzes ergibt $1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n} \cdot a^n$.
  Durch Umstellen dieser Gleichung erhält man die einzig sinnvolle Erweiterung der Definition, nämlich $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

- Die Erweiterung auf rationale Zahlen erfolgt durch eine ähnliche Überlegung. Für jedes $k \in \mathbb{N}^+$ folgt aus $1 = \underbrace{\frac{1}{k} + \ \ldots \ + \frac{1}{k}}_{k\ mal}$ und der formalen Anwendung des Exponentialgesetzes die Gleichung $a = a^1 = \left(a^{\frac{1}{k}}\right)^k$.
  Folglich ergibt sich als einzig sinnvolle Erweiterung die Definition $a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$ und für Brüche der Form $\frac{n}{k}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$ der Ausdruck $a^{\frac{n}{k}} = (\sqrt[k]{a})^n$.

- Als weitere wichtige Eigenschaft dieser Exponentialfunktionen kann man die Regel $a^{p \cdot q} = (a^p)^q$ für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ ableiten.

Die Erweiterung auf reelle Potenzen ist nur durch stetige Fortsetzung möglich. Danach sind für alle $a > 1$ die Funktionen $f(x) = a^x$ stetig und streng monoton wachsend und somit injektiv. Beschränkt man den Wertebereich auf das Bild der Funktion, nämlich die Menge $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen, so entsteht eine bijektive, also umkehrbare Funktion. Die Umkehrfunktion wird mit $\log_a x$ bezeichnet und *Logarithmusfunktion zur Basis* $a$ genannt. Im Spezialfall $a = e$ ist das der sogenannte *natürliche Logarithmus*. Die folgende Regel kann man deshalb auch als eine Definition des Logarithmus ansehen:

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Logarithmusfunktion ergeben sich aus der Übertragung des Exponentialgesetzes auf die Umkehrfunktion:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \qquad log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$$

Eine weitere nützliche Eigenschaft der Logarithmusfunktionen besteht darin, dass ein Basiswechsel lediglich eine Skalierung der Funktion, d.h. die Multiplikation der Funktionwerte mit einer bestimmeten Konstanten bewirkt. Die Umrechnung von der Basis $a$ zur Basis $b$ erfolgt mit der Formel

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$