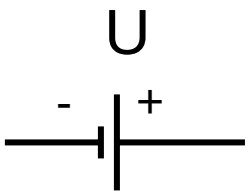
Freie Universität Berlin

Kapitel 2:

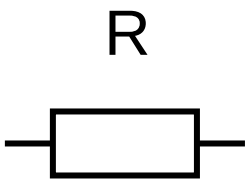
Gleichstromnetz

- Grundbausteine
- Ohmsches Gesetz
- Kirchhoffsche Regeln
- Zählpfeilsystem
- Grundschaltungen
- Vereinfachung von Netzwerken
- Berechnungsverfahren
- Ideale und reale Spannungsquelle
- Idealer und realer Schalter

Widerstandsnetzwerk
Grundbausteine



Gleichspannungsquelle



Widerstand

Ohmsches Gesetz

Der Strom der durch einen Leiter fließt ist
direkt proportional der angelegten Spannung und
umgekehrt proportional dem Widerstand des Leiters.

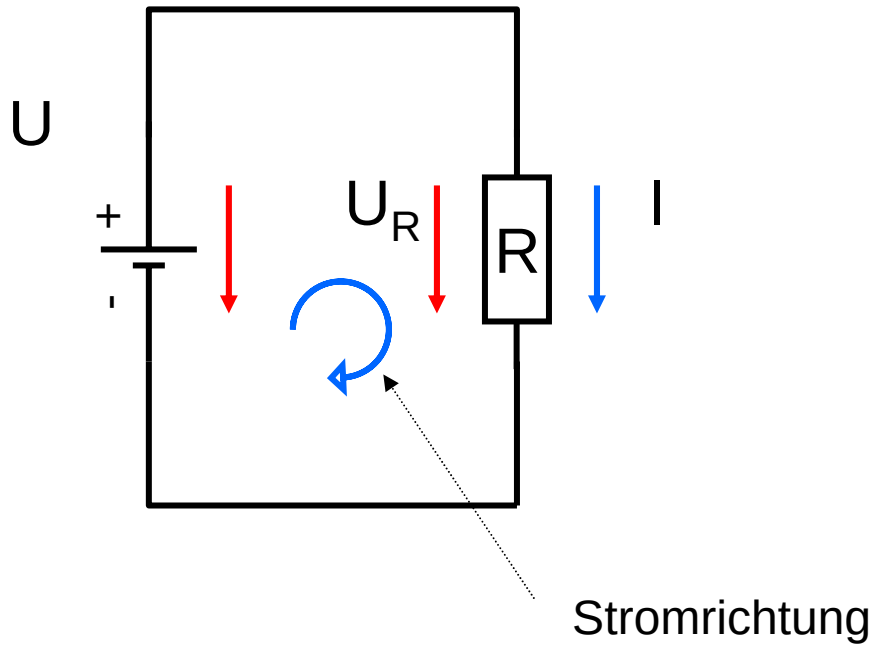
$$I = \frac{U}{R}$$

$$U = R \cdot I$$

$$R = \frac{U}{I}$$

Widerstandsnetzwerke

einfaches Netzwerk



$$R = \frac{U}{I}$$

$$U_R = I \cdot R$$

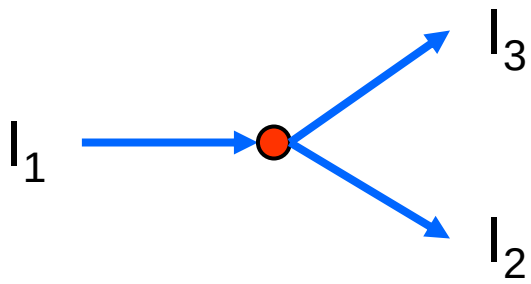
$$I = \frac{U_R}{R}$$

Kirchhoffsche Regeln
Knotenregel

In jedem Knotenpunkt ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

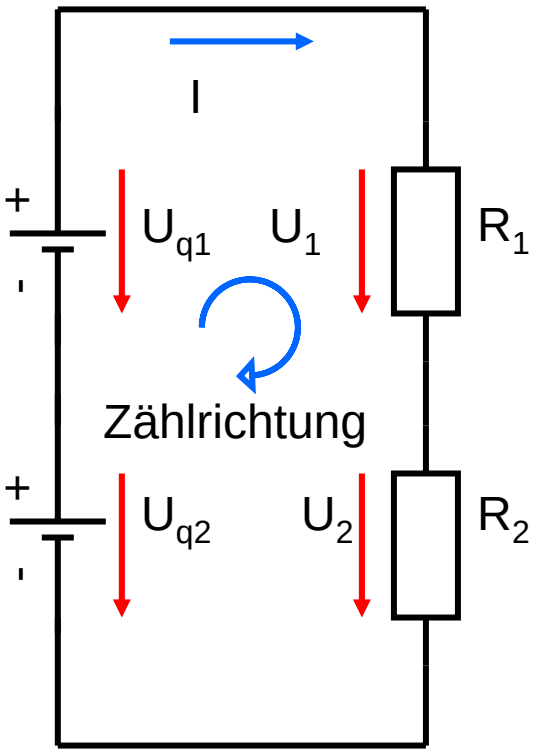
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} I_i = 0}$$

Zufließende Ströme tragen ein positives Vorzeichen.
Abfließende Ströme tragen ein negatives Vorzeichen.



$$\boxed{+I_1 - I_2 - I_3 = 0}$$

Kirchhoffsche Regeln
Maschenregel



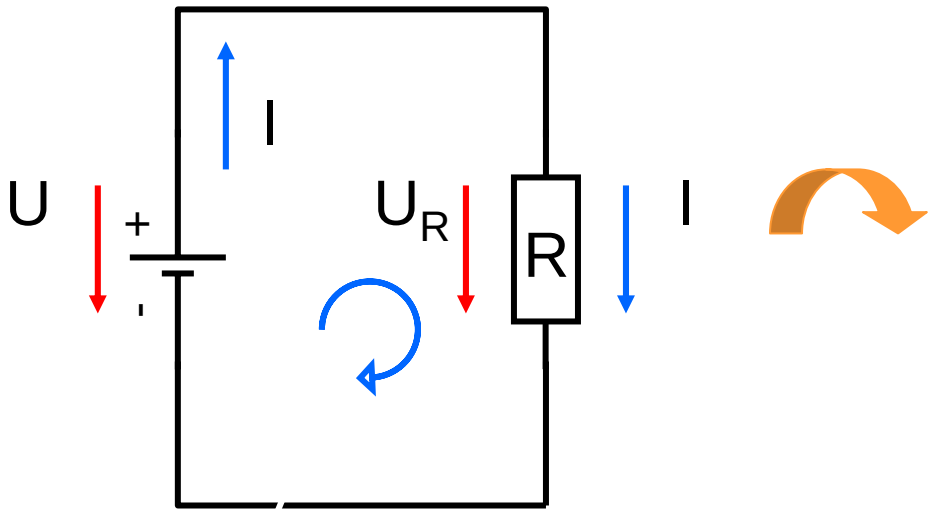
In jedem geschlossenen Stromkreis ist die
Summe der Quellspannungen gleich der Summe der Spannungsabfälle.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} U_i = 0}$$

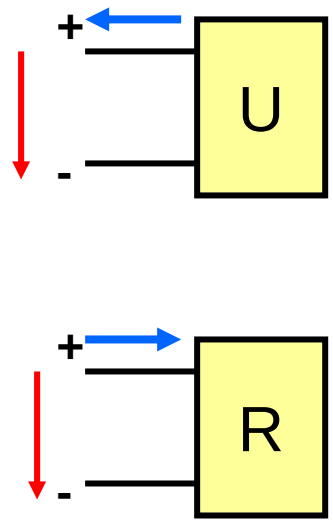
$$0 = -U_{q1} - U_{q2} + I \cdot R_1 + I \cdot R_2$$

$$I = \frac{U_{q1} + U_{q2}}{R_1 + R_2}$$

Zählpfeilsystem



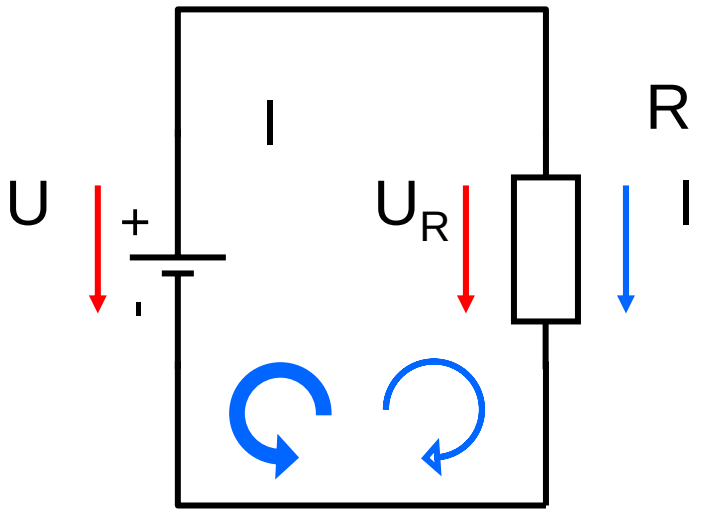
Aktives Zweipol „Erzeuger“



Passives Zweipol „Verbraucher“

Die Richtung des Zählpfeils wird normaler Weise in Richtung der Stromflußrichtung festgelegt. Ist diese nicht bekannt, kann sie beliebig festgelegt werden.

Zählpfeilsystem



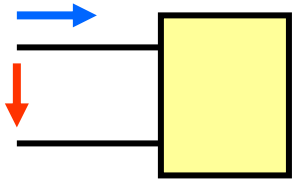
Zur Vorzeichenfrage in einer Masche:

Bei $-U; +U_R$

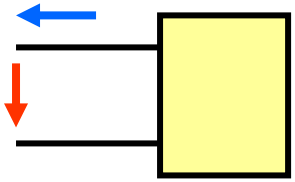
Bei $+U; -U_R$

Zählpfeilsystem

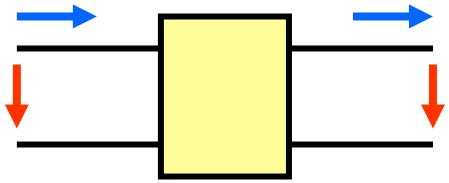
Verbraucher



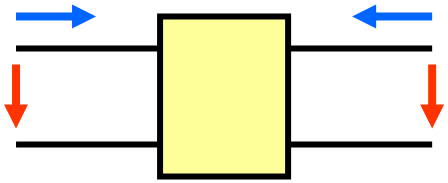
Erzeuger



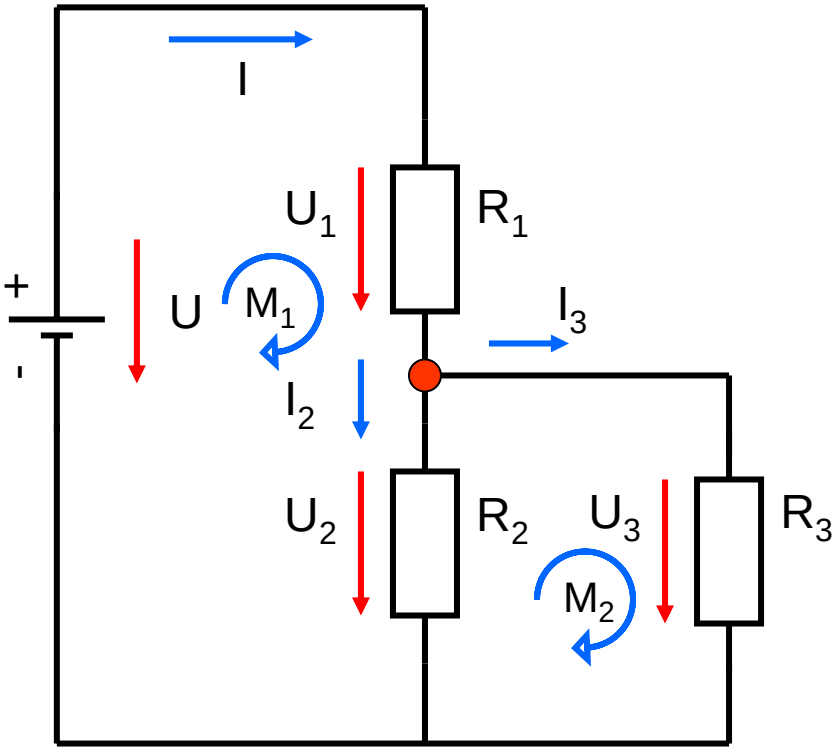
Kettenzählpfeilsystem



Symmetrisches System



Kirchhoffsche Sätze
Beispiel



für den Knotenpunkt:

$$0 = I - I_2 - I_3$$

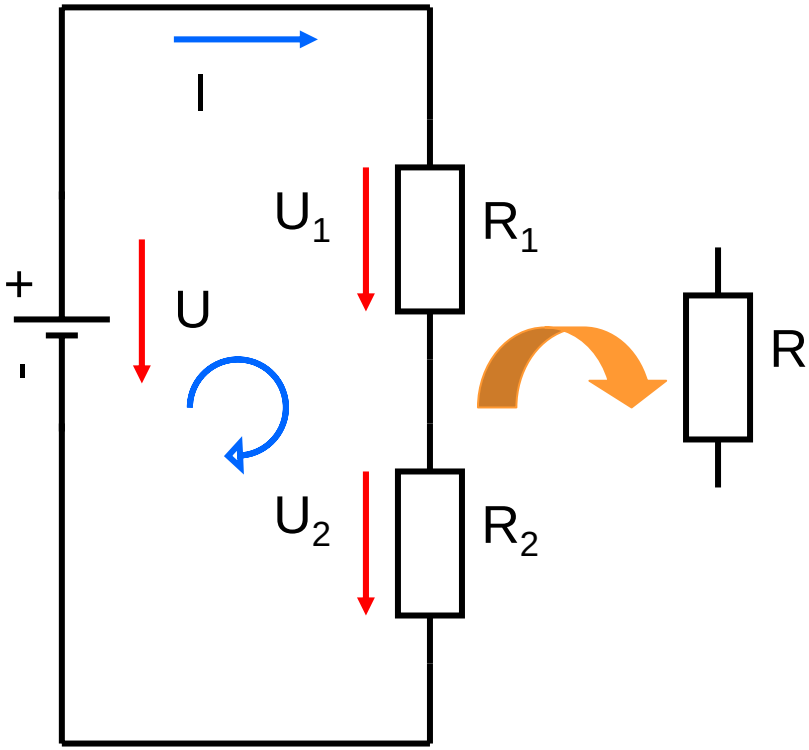
für die Masche M_1:

$$0 = -U + U_1 + U_2$$
$$0 = -U + I \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2$$
$$U = I \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2$$
$$U = I \cdot (R_1 + R_2)$$

für die Masche M_2:

$$0 = -U_2 + U_3$$
$$0 = -I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3$$
$$I_2 \cdot R_2 = I_3 \cdot R_3 = U_2 = U_3$$
$$\frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2}$$

Widerstandsnetzwerk
Reihenschaltung



$$0 = -U + U_1 + U_2$$

$$U = U_1 + U_2$$

$$U_1 = I_1 \cdot R_1$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2$$

$$I = I_1 = I_2$$

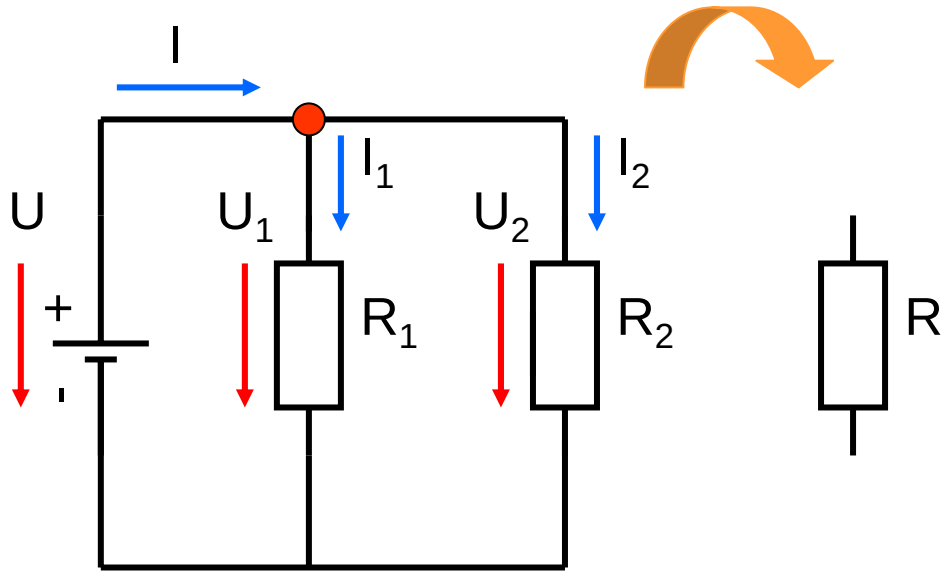
$$U = I \cdot (R_1 + R_2)$$

$$R_1 + R_2 = \frac{U}{I} = R$$

$$R = R_1 + R_2$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Widerstandsnetzwerk
Parallelschaltung



$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

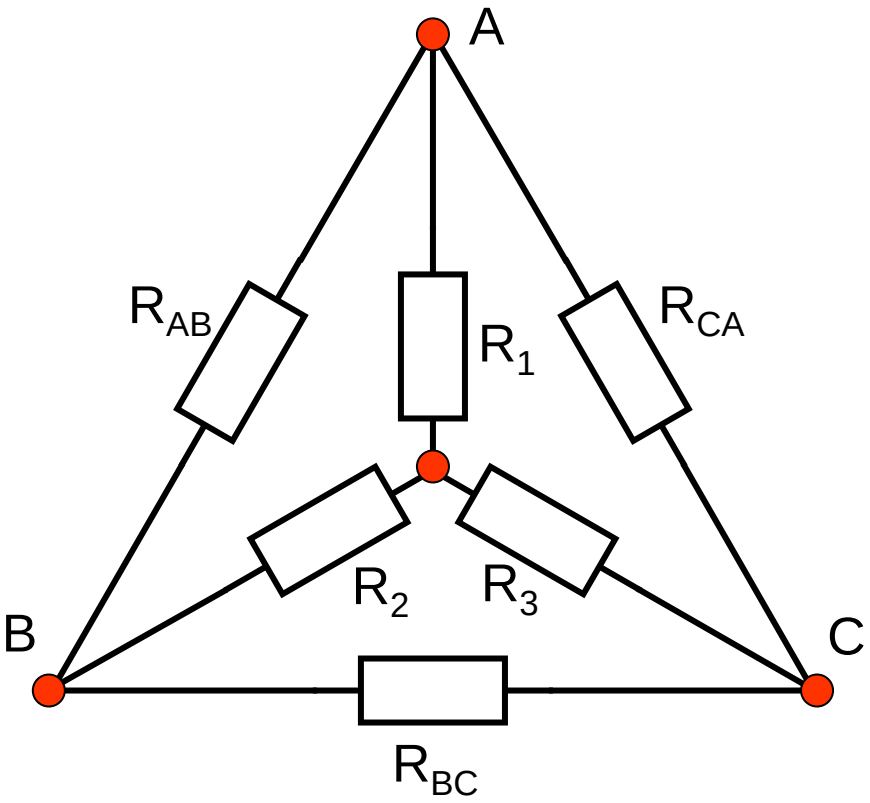
$$I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$I = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = U\frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Widerstandsnetzwerk
Umformung Dreieck zu Stern

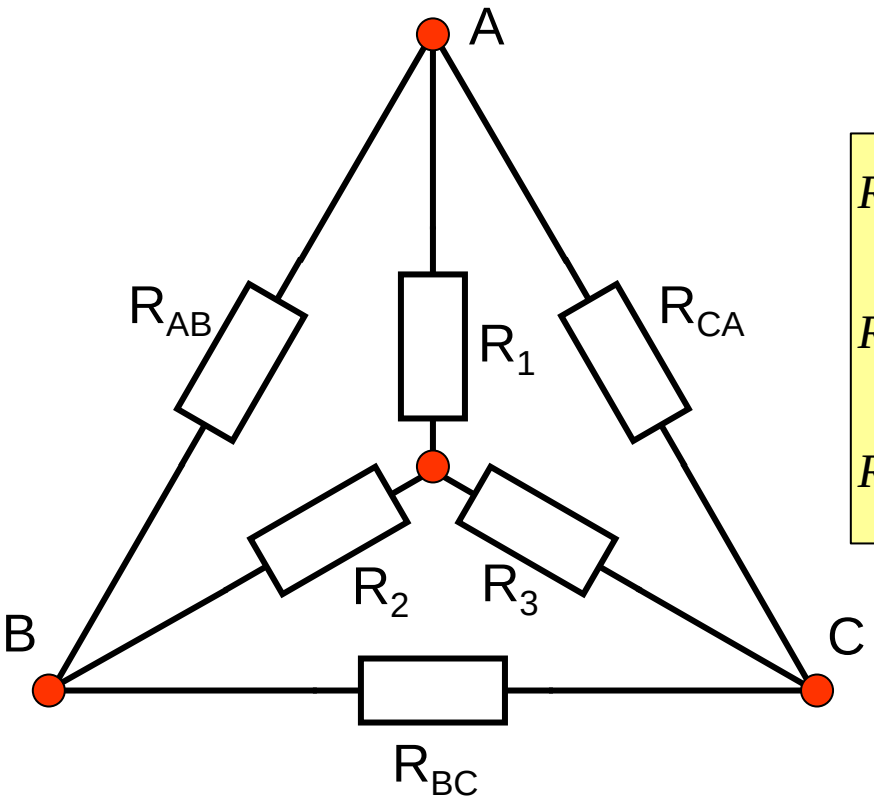


$$R_1 = \frac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_2 = \frac{R_{BC} \cdot R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_3 = \frac{R_{BC} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

Widerstandsnetzwerk
Umformung Stern zu Dreieck

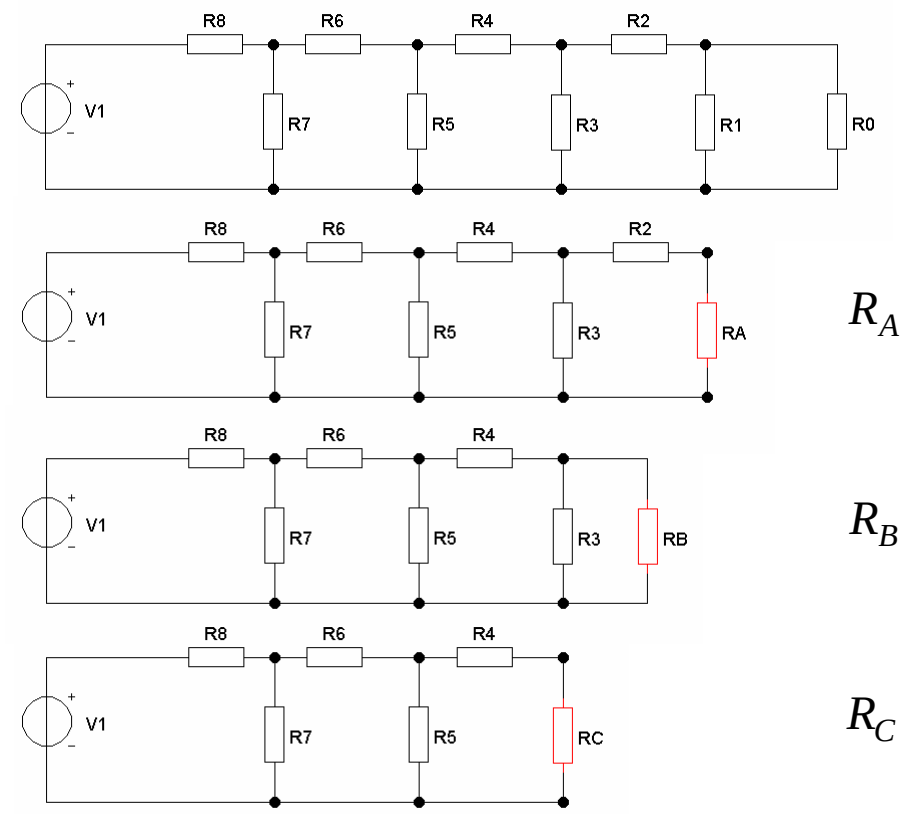


$$R_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_3}$$

$$R_{BC} = \frac{R_2 \cdot R_1 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_1}$$

$$R_{CA} = \frac{R_3 \cdot R_1 + R_3 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2}{R_2}$$

Widerstandsnetzwerk
Kettenschaltung



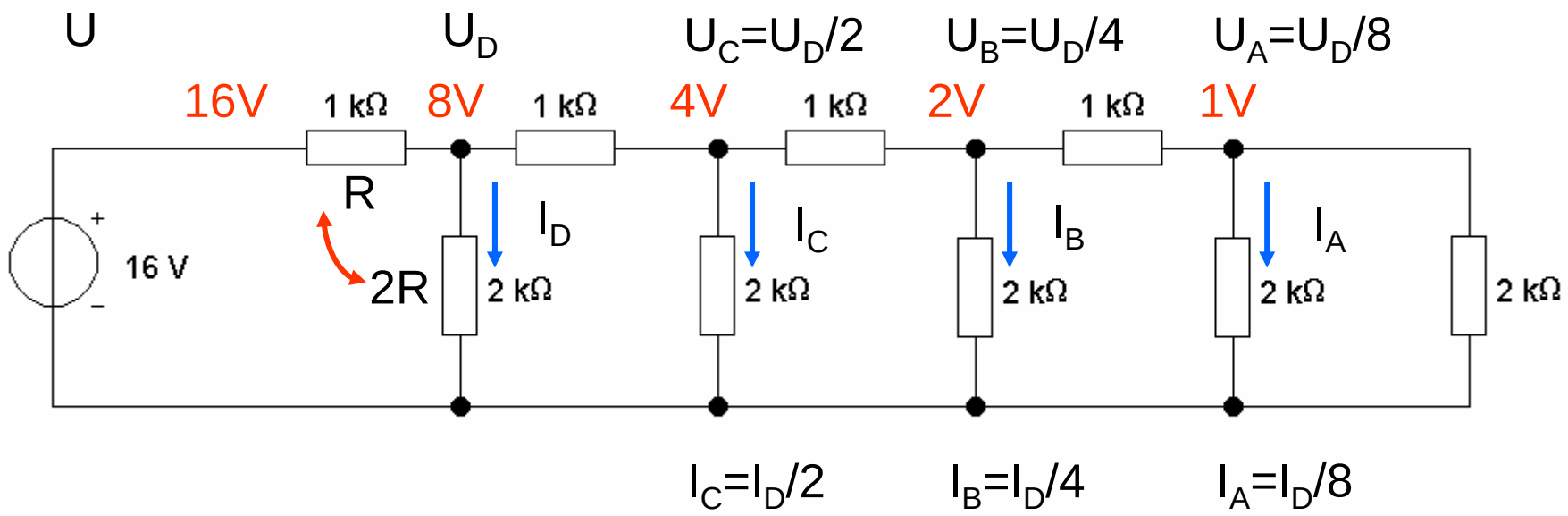
$$R_A = \frac{R_0 \cdot R_1}{R_0 + R_1}$$

$$R_B = R_A + R_2$$

$$R_C = \frac{R_B \cdot R_3}{R_B + R_3}$$

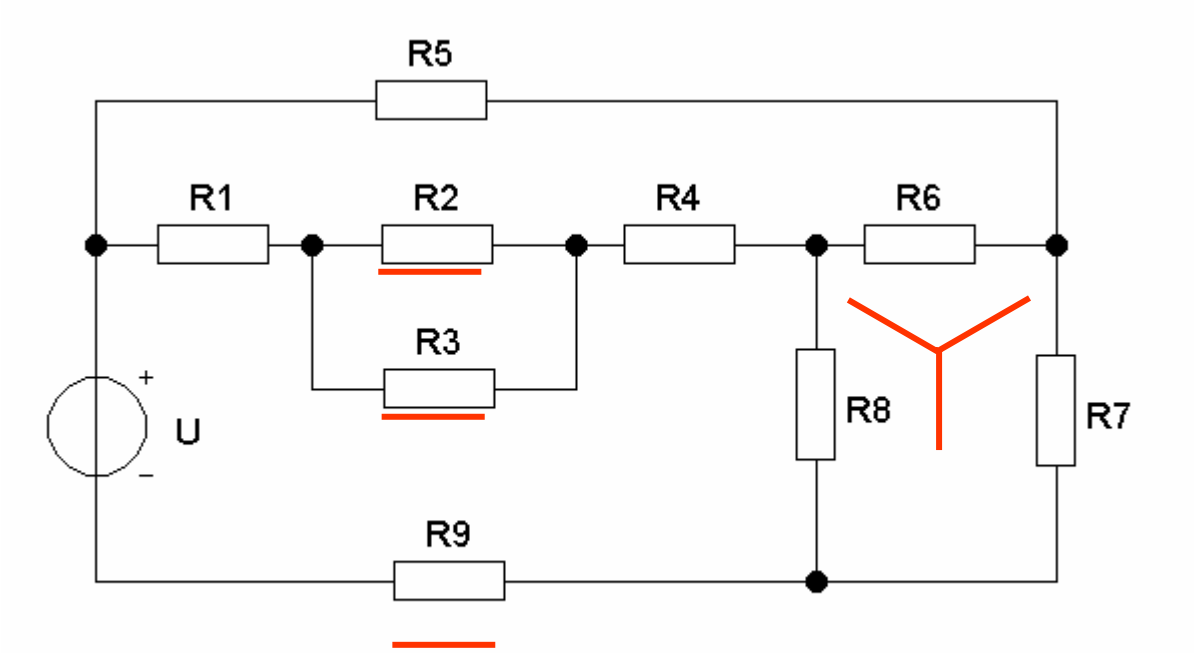
Zusammenfassung und Vereinfachung durch
- Parallelschaltung zu Ersatzwiderstand und
- Reihenschaltung zu Ersatzwiderstand Umwandlung.

Widerstandsnetzwerk
R2R - Netzwerk



Bevorzugt bei Digital/Analogwandlern eingesetzt.
Der Widerstandsteiler teilt die Eingangsspannung U in 2^n Schritten.

Widerstandsnetzwerk
Verzweigtes Netzwerk



Zusammenfassung und Vereinfachung durch
- Dreieckschaltung zu Sternschaltung,
- Parallelschaltung zu Ersatzwiderstand und
- Reihenschaltung zu Ersatzwiderstand Umwandlung.

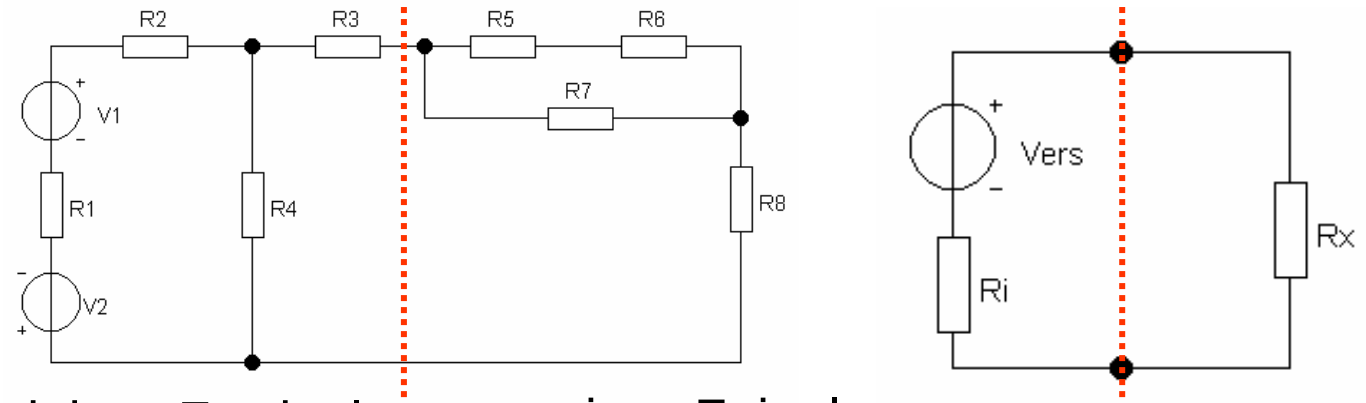
Berechnungsverfahren

- Ersatzspannungsquelle
- Überlagerungsverfahren
- Maschenstromverfahren

Widerstandsnetzwerk

Berechnung auf Basis einer Ersatzspannungsquelle

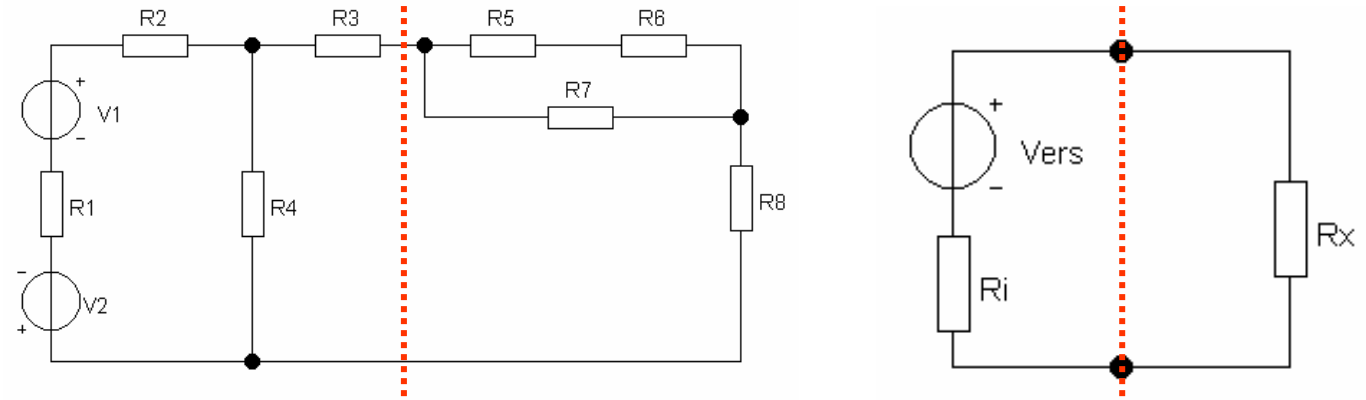
Eine Schaltung wird derart vereinfacht, das ein aktives und ein passives Zweipol die Schaltung ersetzen. Auf Basis dieser Ersatzschaltung lassen sich alle Ströme und Spannungen berechnen.



aktives Zweipol passives Zeipol

Widerstandsnetzwerk

Berechnung auf Basis einer Ersatzspannungsquelle



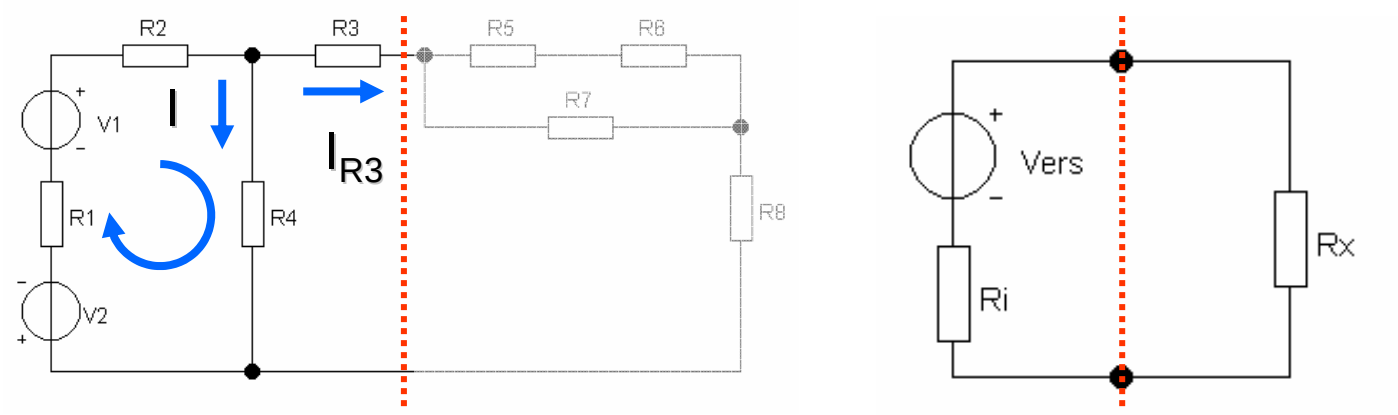
1. Berechnung der Ersatzwiderstände

$$R_i = R_3 + \frac{(R_1 + R_2)\cdot R_4}{(R_1 + R_2) + R_4}$$

$$R_X = R_8 + \frac{(R_5 + R_6)\cdot R_7}{(R_5 + R_6) + R_7}$$

Widerstandsnetzwerk

Berechnung auf Basis einer Ersatzspannungsquelle



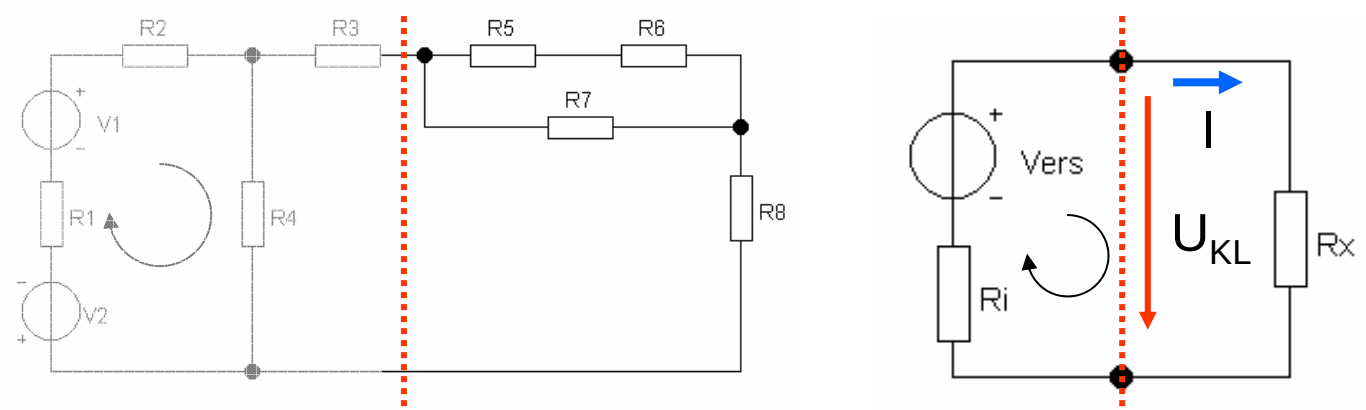
2. Berechnung der Leerlaufspannung

$$I_{R3} = 0 \qquad U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3 = 0 \qquad U_{R4} = I \cdot R_4 = V_{ers}$$

$$0 = V_2 - V_1 + I \cdot (R_1 + R_2 + R_4) \qquad I = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2 + R_4}$$

Widerstandsnetzwerk

Berechnung auf Basis einer Ersatzspannungsquelle



3. Berechnung der Klemmspannung und des Stroms

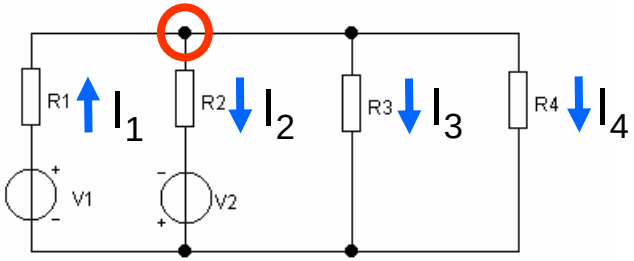
$$0 = -V_{ers} + I \cdot R_X + I \cdot R_i \qquad U_{KL} = I \cdot R_X$$

$$I = \frac{V_{ers}}{R_i + R_x} \qquad U_{KL} = V_{ers} - I \cdot R_i$$

Widerstandsnetzwerk

Berechnung nach dem Überlagerungsverfahren

Sind in einer Schaltung nur lineare Widerstände und Spannungsquellen vorhanden, so kann der Strom in jedem Zweig der Schaltung als Summe der Teilströme der einzelnen Spannungsquellen ermittelt werden. Betrachtet wird hier der rot markierte Knotenpunkt.

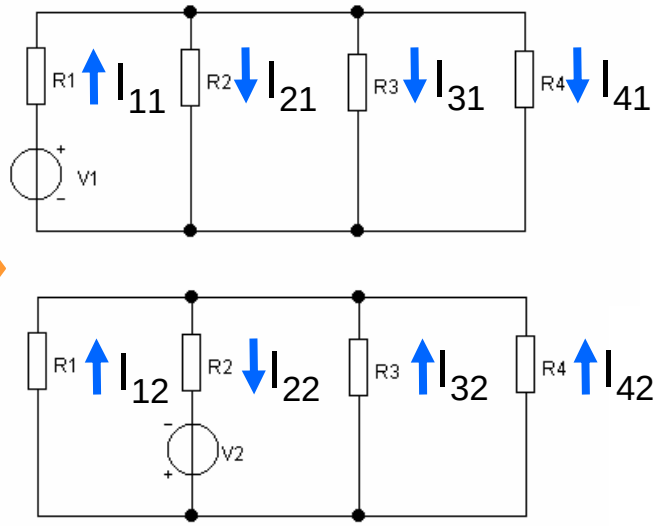


$$I_1 = I_{11} + I_{12}$$

$$I_2 = I_{21} + I_{22}$$

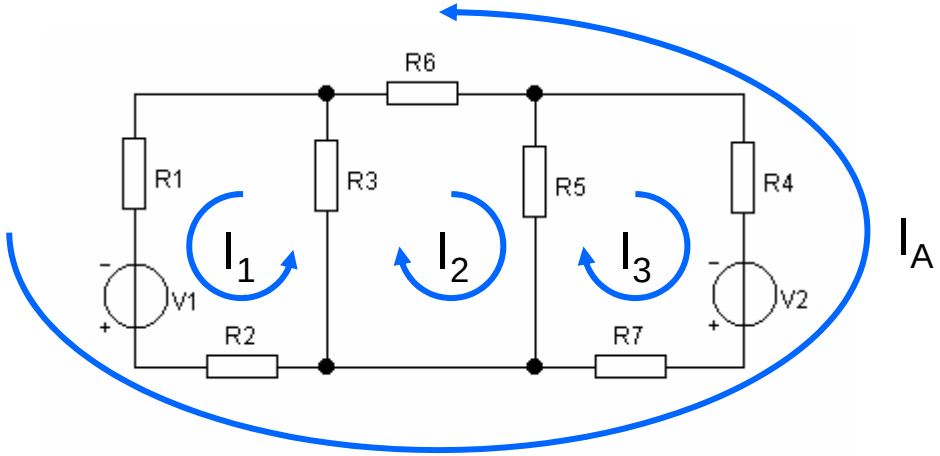
$$I_3 = I_{31} - I_{32}$$

$$I_4 = I_{41} - I_{42}$$



Widerstandsnetzwerk

Berechnung nach dem Maschenstromverfahren



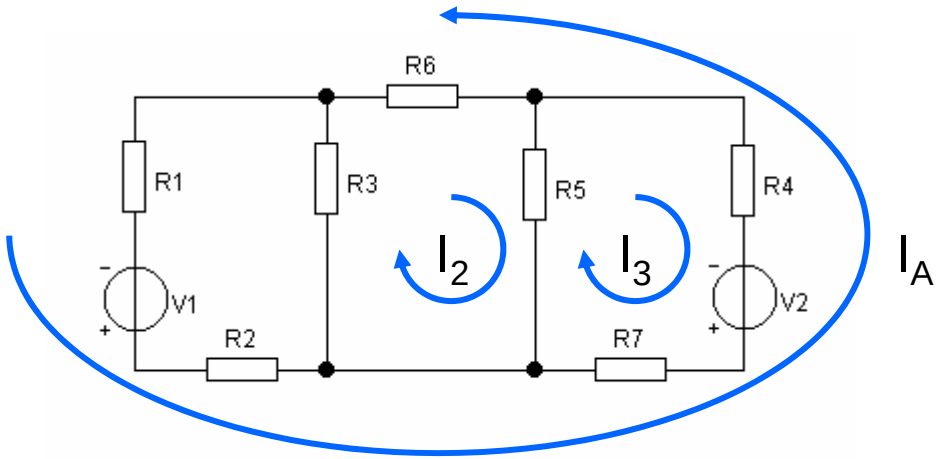
Für jede Masche wird eine Stromflussrichtung angenommen.

Widerstandsnetzwerk

Berechnung nach dem Maschenstromverfahren

- Jeder unabhängigen Masche wird ein Strom zugeordnet. Die Richtung dieses Maschenstroms kann man beliebig wählen, sie gilt als positiv.
- Man trifft die Zuordnung der Maschenströme so, das durch den interessierenden Maschenzweig nur ein Strom fließt.
- Aufstellung der Gleichungen für die ausgewählten Maschen auf Grund des Maschensatzes.
- Aus dem Gleichungssystem der Maschensätze ist der gesuchte Strom zu berechnen.

Widerstandsnetzwerk
Berechnung nach dem Maschenstromverfahren



- Man trifft die Zuordnung der Maschenströme so, das durch den interessierenden Maschenzweig nur ein Strom fließt.

Widerstandsnetzwerk

Berechnung nach dem Maschenstromverfahren

Masche I_A

$$U_1 - U_2 = \boxed{I_A} \cdot \overbrace{(R_1 + R_2 + R_7 + R_4 + R_6)}^{R_{11}} \boxed{- I_2} \cdot \overbrace{R_6}^{R_{21}} \boxed{- I_3} \cdot \overbrace{(R_7 + R_4)}^{R_{31}}$$

Masche I_2

$$0 = \boxed{-I_A} \cdot \overbrace{R_6}^{R_{12}} \boxed{+ I_2} \cdot \overbrace{(R_3 + R_6 + R_5)}^{R_{22}} \boxed{- I_3} \cdot \overbrace{R_5}^{R_{32}}$$

Masche I_3

$$U_2 = \boxed{-I_A} \cdot \overbrace{(R_7 + R_4)}^{R_{13}} \boxed{+ I_2} \cdot \overbrace{R_5}^{R_{23}} \boxed{+ I_3} \cdot \overbrace{(R_5 + R_4 + R_7)}^{R_{33}}$$

Widerstandsnetzwerk
Berechnung nach dem Maschenstromverfahren

Freie Universität Berlin

Die Maschengleichungen als Matrixgleichung geschrieben:

$$\overline{U} = \overline{RI}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 - U_2 \\ 0 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

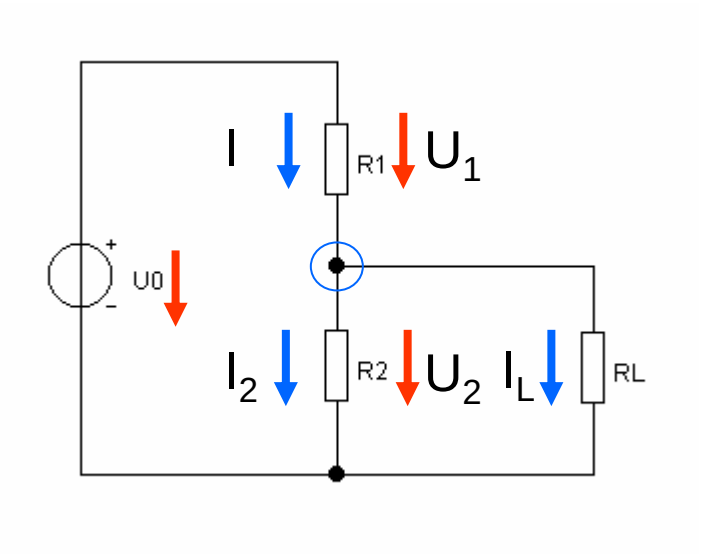
$$\overline{R^{-1}} \cdot \overline{U} = \overline{R^{-1}} \cdot \overline{RI}$$

$$\overline{R^{-1}} \cdot \overline{U} = \overline{I}$$

$$\overline{I} = \overline{R^{-1}} \cdot \overline{U}$$

Widerstandsnetzwerk

Berechnung einfacher Netzwerke 1



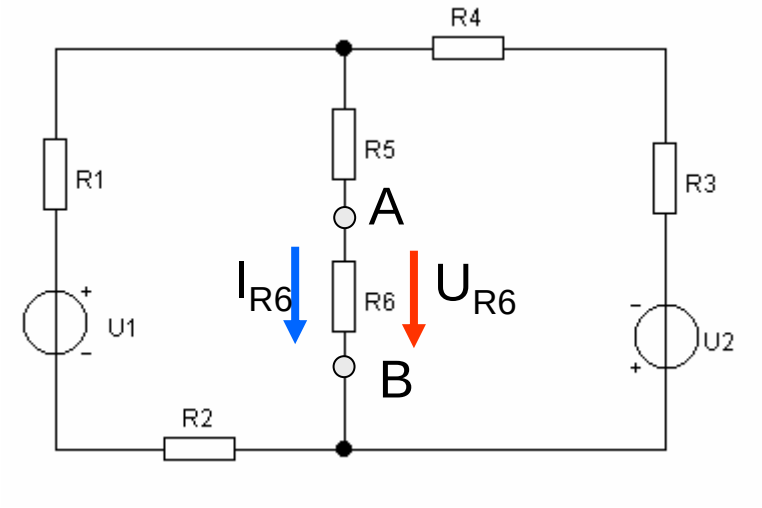
$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}} \cdot U_0$$

$$U_2 = \frac{\frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}} \cdot U_0$$

$$I = \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}} \qquad I_2 = \frac{U_2}{R_2} \qquad I_L = \frac{U_2}{R_L}$$

Widerstandsnetzwerk

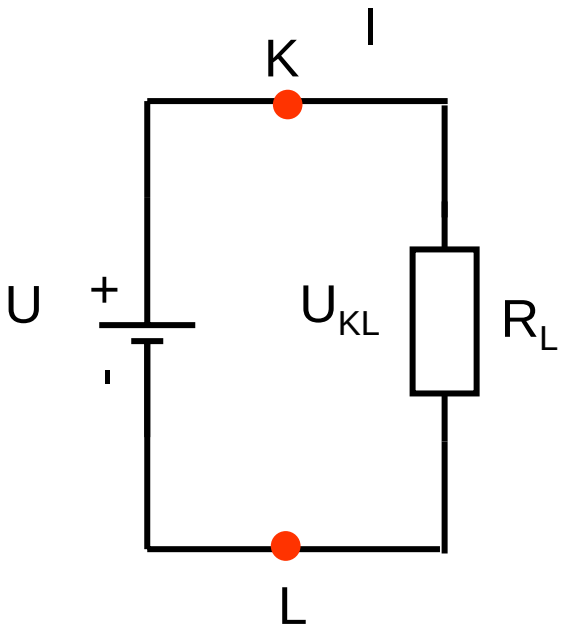
Berechnung einfacher Netzwerke 2



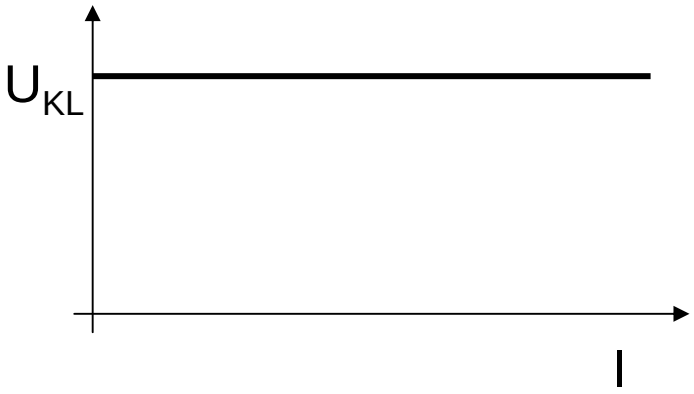
Zu berechnen sind Strom und Spannung über dem Widerstand R6.

Die Berechnung soll auf Basis des Überlagerungsverfahrens und des Zweipolverfahren (Ersatzspannungsquelle) erfolgen.

Ideale Spannungsquelle

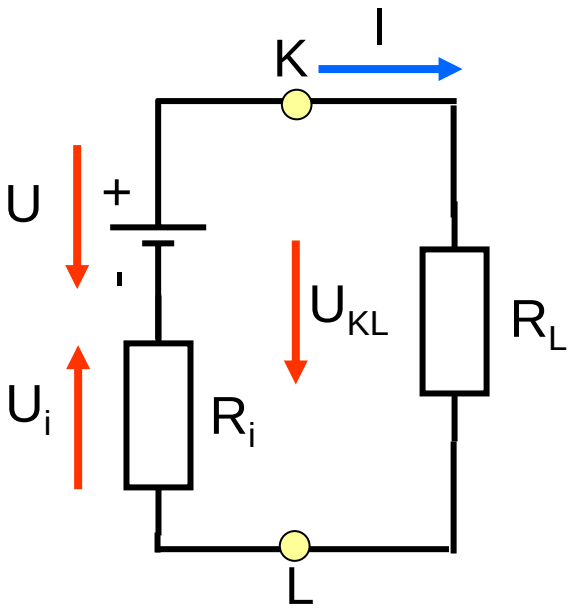


$$U = U_{KL} = U_R$$
$$U_{KL} = I \cdot R_L$$



Die Spannungsquelle hat keinen Innenwiderstand und die Klemmspannung bleibt bei beliebigem Strom konstant.

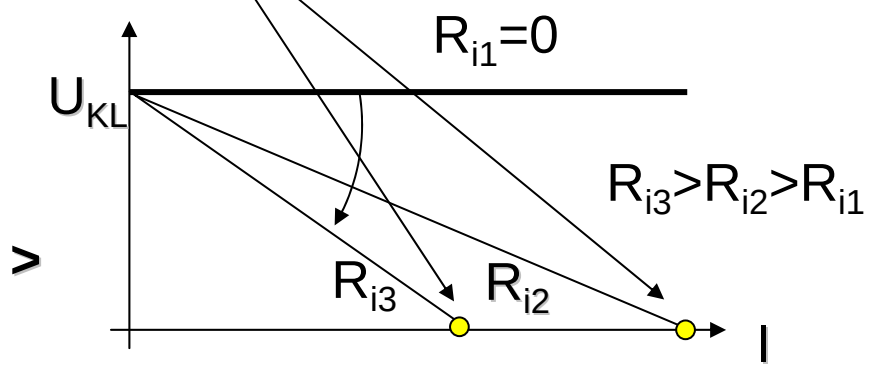
Reale Spannungquelle



$$U_{KL} = U - U_i$$

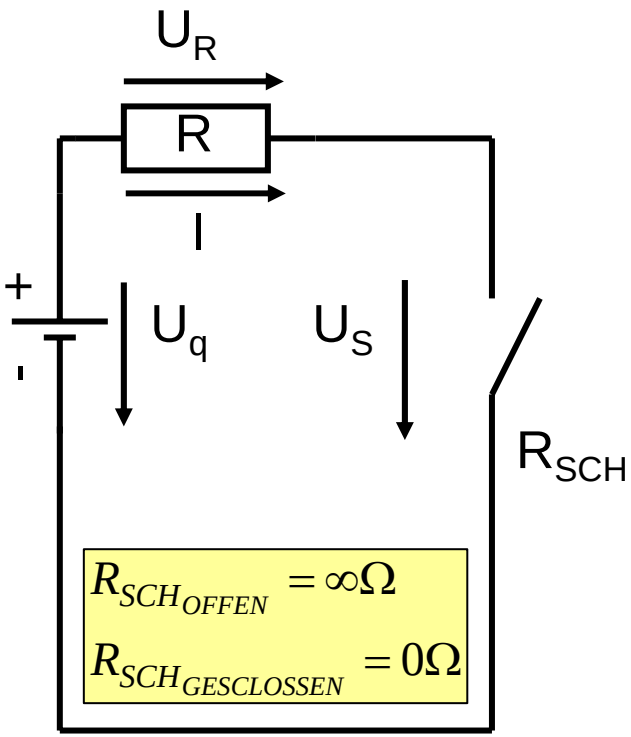
$$U_{KL} = U - I \cdot R_i = I \cdot R_L$$

$$I_{max} = \frac{U}{R_i} \qquad I = \frac{U}{R_i + R_L}$$



Die Spannungsquelle hat einen Innenwiderstand und die Klemmspannung nimmt mit größerem Strom ab.

Ideale Schalter



$$R_{SCH_{OFFEN}} = \infty\Omega$$
$$R_{SCH_{GESCLOSSEN}} = 0\Omega$$

$$U_S = U_q - U_R$$

$$I = \frac{U_q}{R + R_{SCH}}$$

$$U_S = U_q - I \cdot R$$

Schalter geschlossen

$$I = \frac{U_q}{R}$$

$$U_S = 0$$

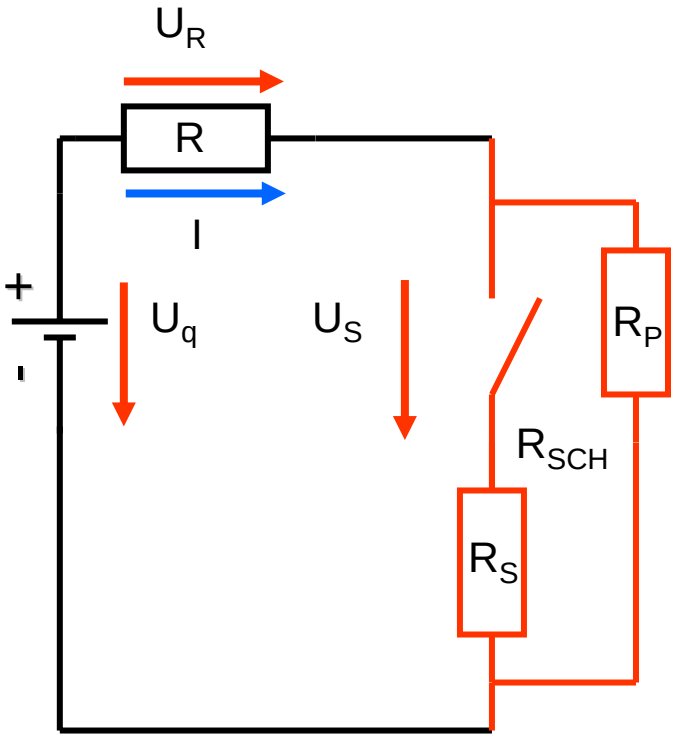
Schalter geöffnet

$$I = 0$$

$$U_S = U_q$$

Reale Schalter

$$R_S << R_P$$



$$U_S = U_q - U_R$$

$$I = \frac{U_q}{R + R_{SCH}}$$

$$U_S = U_q - I \cdot R$$

Schalter geschlossen

$$R_{SCH} = \frac{R_S \cdot R_P}{R_S + R_P} \approx R_S$$

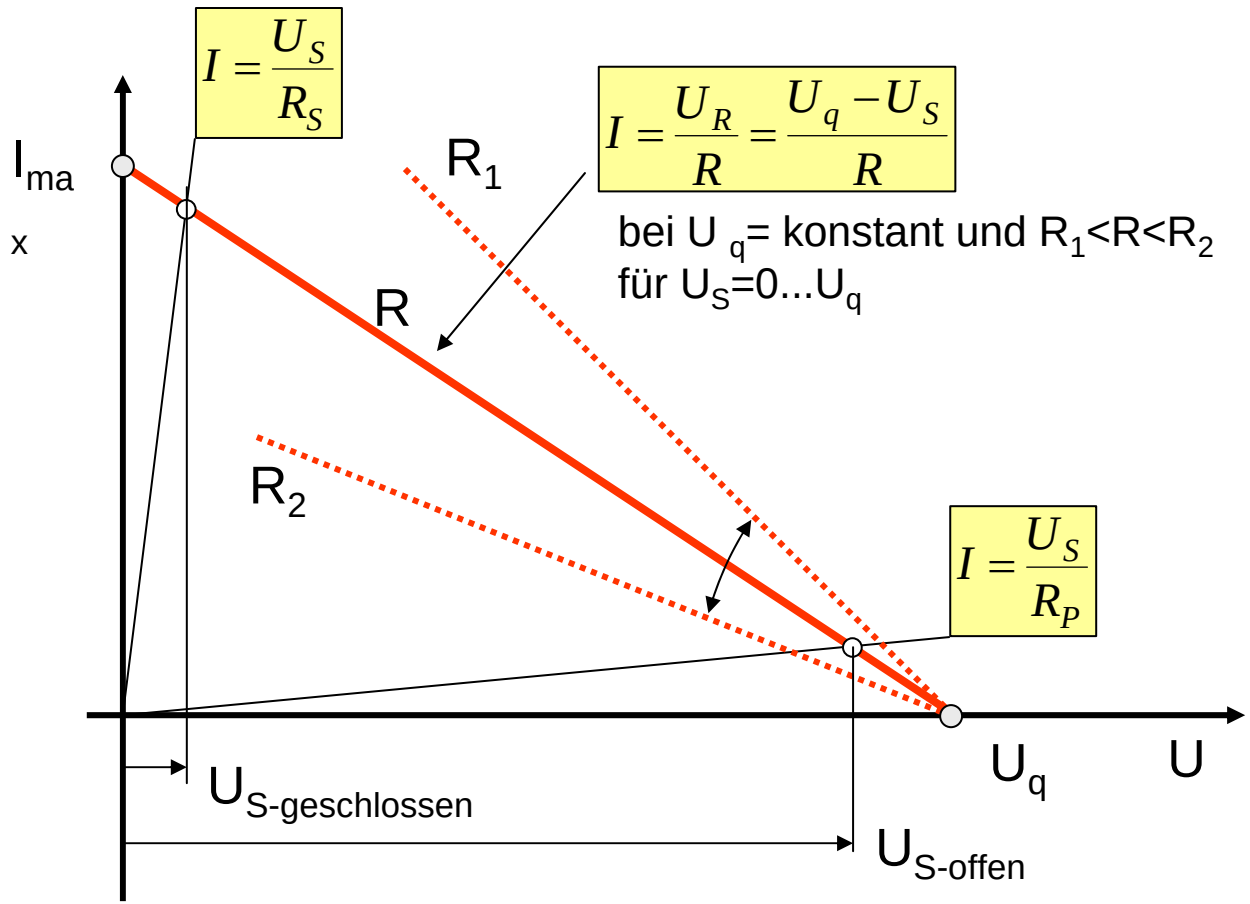
$$U_S = U_q \left(1 - \frac{R}{R + R_S}\right)$$

Schalter geöffnet

$$R_{SCH} = R_P$$

$$U_S = U_q \left(1 - \frac{R}{R + R_P}\right)$$

Schalterkennlinie



Anwendungsbereites Wissen

- Ohmsche Gesetz
- Kirchhoffsche Regeln
- Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen
- Berechnung elektrischer Netzwerke
  - Überlagerungsverfahren
  - Ersatzspannungsquelle
- Ideale und Reale Spannungsquelle
- Idealer und Realer Schalter