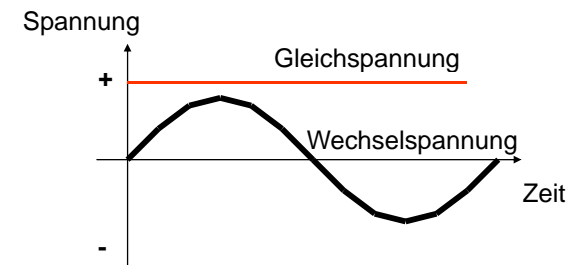


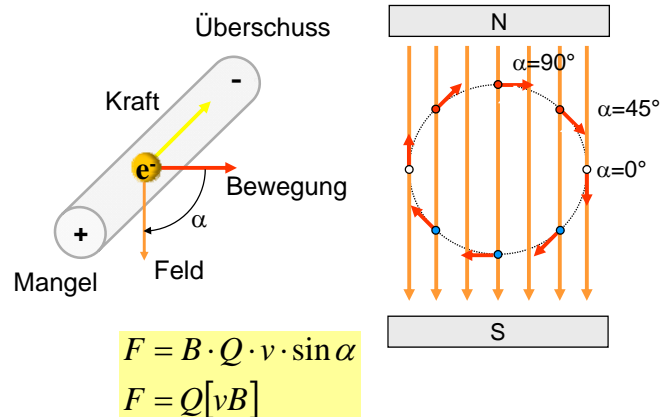
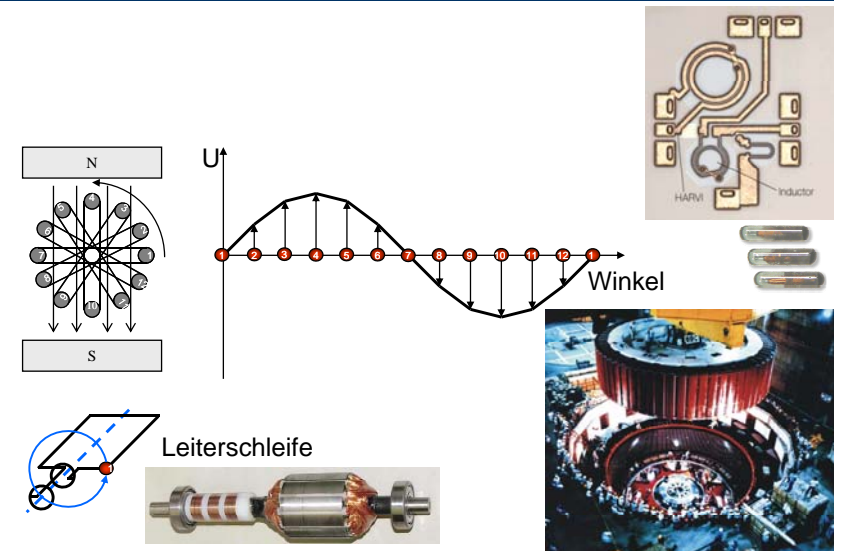
Kapitel 3:

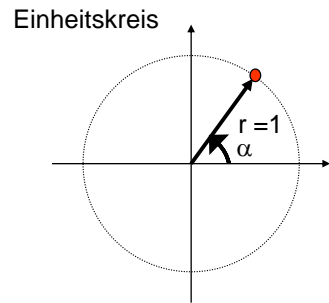
Wechselspannungsnetz

- Kenngrößen
- Wechselstromwiderstand
- Rechnen mit komplexen Zahlen
- Grundsaltungen und Zeigerdiagramme
- CR-Glieder als Hochpassfilter
- RC-Glieder als Tiefpassfilter
- CR-Glieder als Differenzierglieder
- RC-Glieder als Integrierglieder



Wechselspannungserzeugung

Wechselspannungserzeugung
Leiterschleife im Magnetfeld



Bei einer Umdrehung legt der Punkt auf dem Umfang des Kreises einen Weg von:

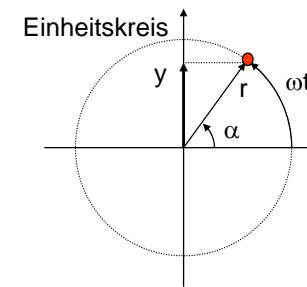
$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

zurückgelegt.
Bei $r = 1$ ist der Weg gleich 2π .
Der Vollkreis entspricht 360°
oder in Bogenmaß 2π .

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

f - Frequenz
 T - Zeit für einen Umlauf
oder auch Periodendauer
 ω - Kreisfrequenz



$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T}$$

$$\omega \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t$$

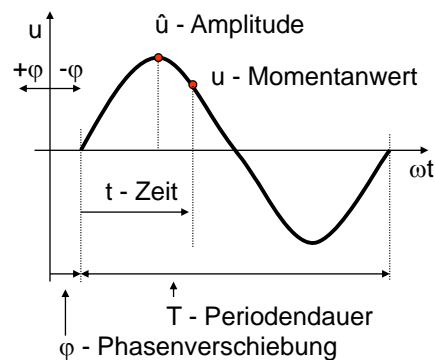
$$\omega \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}$$

$$x = \frac{t}{T}$$

$$y = r \cdot \sin(\alpha)$$

$$y = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\omega \cdot t)$$



Frequenz

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Augenblicks- oder Momentanwert

$$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$P = U \cdot I$$

$$P = R \cdot I^2$$

$$W = P \cdot t$$

$$W = R \cdot I^2 \cdot t$$

$$R \cdot I^2 \cdot T = R \cdot \int_0^T i^2 \cdot dt$$

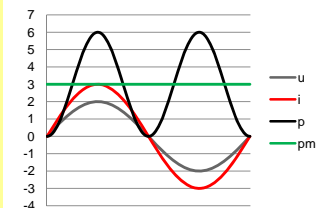
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 \cdot dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{i}^2 \cdot \sin^2(\omega t) dt}$$

$$I = \hat{i} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt}$$

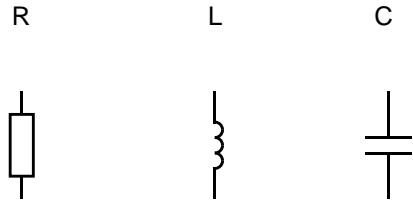
$$I_{eff} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot \hat{i}$$

$$W = R \cdot \int_0^T i^2 \cdot dt$$



Effektivwert

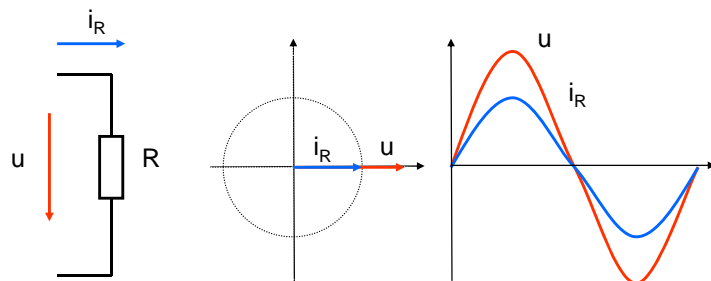
Der Effektivwert eines Wechselstroms, ist der Wert eines Gleichstroms, der innerhalb einer Periode die gleiche Arbeit wie der Wechselstrom leistet.



In Wechselstromnetzwerken gelten ebenfalls das **Ohmsche Gesetz** und die **Kirchhoffschen Gesetze**. Alle Berechnungen werden auf Basis der **Komplexen Zahlen** durchgeführt.



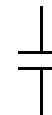
$$u_R = R \cdot i = R \cdot \hat{i} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



Phasenverschiebung $\varphi = 0$

Ohmscher Widerstand

$$R = \frac{U}{I}$$

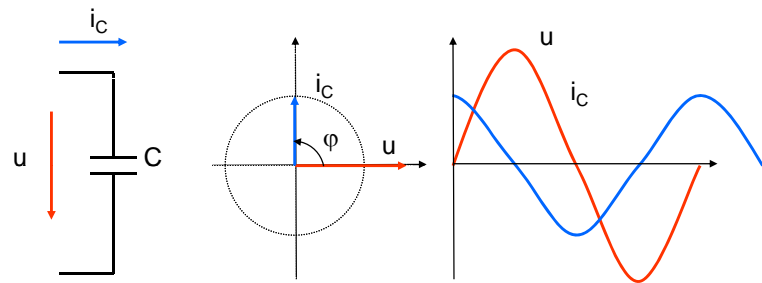


$$u_C = \hat{u}_C \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\cos(\omega \cdot t) = \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \frac{d(\hat{u}_C \cdot \sin(\omega \cdot t))}{dt} = C \cdot \omega \cdot \hat{u}_C \cdot \cos(\omega \cdot t) = B_C \cdot \hat{u}_C \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$


$$\omega \cdot C = B_C = \frac{1}{X_C}$$



Phasenverschiebung $\varphi = +90^\circ$

Kapazitiver Blindwiderstand

$$X_C = \frac{U_C}{I_C} \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

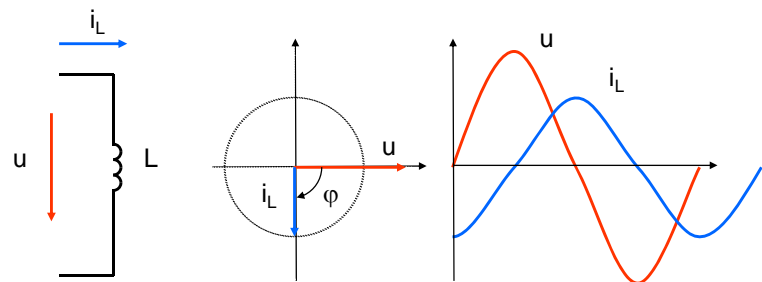


$$i_L = \hat{i}_L \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$X_L = \omega \cdot L \quad B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega \cdot L}$$

$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} = \omega \cdot L \cdot \hat{i}_L \cdot \cos(\omega \cdot t) = X_L \cdot \hat{i}_L \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

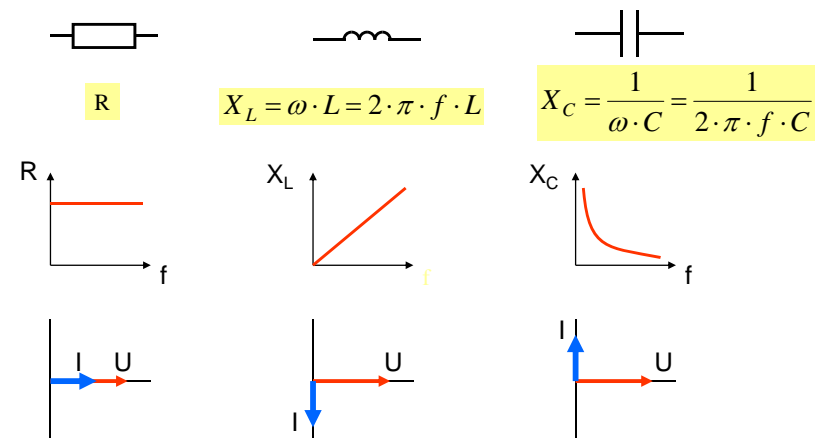
$$\cos(\omega \cdot t) = \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

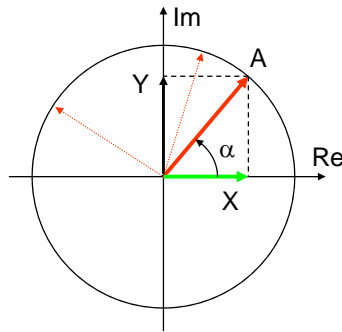


Phasenverschiebung $\varphi = -90^\circ$

Induktiver Blindwiderstand

$$X_L = \frac{U_L}{I_L} \quad X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$$



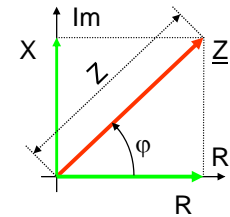


Gaußsche Zahlenebene

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \\ A &= \cos \alpha + j \cdot \sin \alpha \\ X &= \cos \alpha \\ Y &= \sin \alpha \end{aligned}$$

Eulersche Identität beschreibt
Die Eulersche Formel

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \cdot \sin \alpha$$



$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

$$\underline{Z} = Z \cdot \cos(\varphi) + j \cdot Z \cdot \sin(\varphi)$$

$$X = Z \cdot \sin(\varphi)$$

$$R = Z \cdot \cos(\varphi)$$

$$\underline{Z} = R + j \cdot X$$

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Exponential Form

Trigonometrische Form

Imaginärteil von \underline{Z}

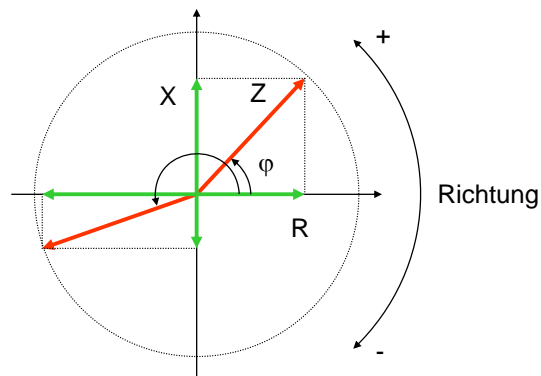
Realteil von \underline{Z}

Algebraische Form

Phasenwinkel

Betrag von \underline{Z}

Komplexe Zahlen setzen sich aus einer reellen Zahl und einer rein imaginären Zahl zusammen, beispielsweise $\underline{Z} = R + jX$,
R heißt Realteil von \underline{Z} ($\text{Re } \underline{Z} = R$) und
X heißt Imaginärteil von \underline{Z} ($\text{IM } \underline{Z} = X$).



$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

$$\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} = Z_1 \cdot \cos(\varphi_1) + j \cdot Z_1 \cdot \sin(\varphi_1) = R_1 + j \cdot X_1$$

$$\underline{Z}_2 = Z_2 \cdot e^{j\varphi_2} = Z_2 \cdot \cos(\varphi_2) + j \cdot Z_2 \cdot \sin(\varphi_2) = R_2 + jX_2$$

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)$$

$$\varphi = \arctan \frac{(X_1 + X_2)}{(R_1 + R_2)}$$

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 - \underline{Z}_2$$

$$\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} = Z_1 \cdot \cos(\varphi_1) + j \cdot Z_1 \cdot \sin(\varphi_1) = R_1 + j \cdot X_1$$

$$\underline{Z}_2 = Z_2 \cdot e^{j\varphi_2} = Z_2 \cdot \cos(\varphi_2) + j \cdot Z_2 \cdot \sin(\varphi_2) = R_2 + jX_2$$

$$\underline{Z} = (R_1 - R_2) + j(X_1 - X_2)$$

$$\varphi = \arctan \frac{(X_1 - X_2)}{(R_1 - R_2)}$$

$$Z = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + (X_1 - X_2)^2}$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2$$

$$\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} = Z_1 \cdot \cos(\varphi_1) + j \cdot Z_1 \cdot \sin(\varphi_1) = R_1 + j \cdot X_1$$

$$\underline{Z}_2 = Z_2 \cdot e^{j\varphi_2} = Z_2 \cdot \cos(\varphi_2) + j \cdot Z_2 \cdot \sin(\varphi_2) = R_2 + jX_2$$

$$Z = Z_1 \cdot Z_2$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} = Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$

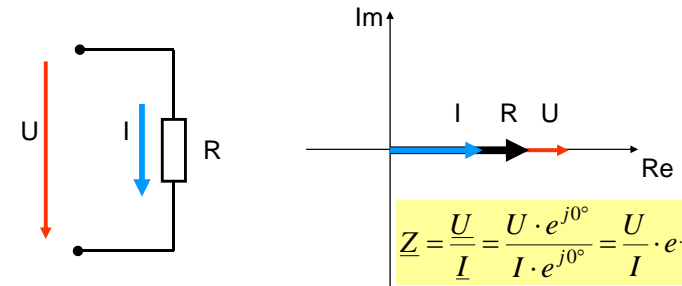
$$\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} = Z_1 \cdot \cos(\varphi_1) + j \cdot Z_1 \cdot \sin(\varphi_1) = R_1 + j \cdot X_1$$

$$\underline{Z}_2 = Z_2 \cdot e^{j\varphi_2} = Z_2 \cdot \cos(\varphi_2) + j \cdot Z_2 \cdot \sin(\varphi_2) = R_2 + jX_2$$

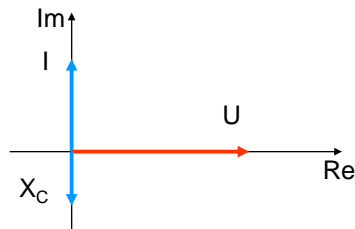
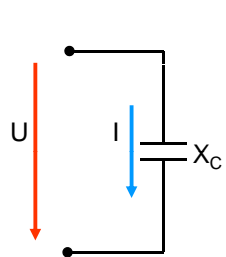
$$Z = \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



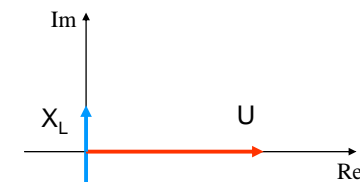
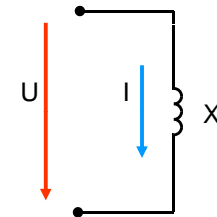
$$\underline{Z} = \frac{U}{I} = \frac{U \cdot e^{j0^\circ}}{I \cdot e^{j0^\circ}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j0^\circ} = R \cdot e^{j0^\circ}$$



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j0^\circ}}{I \cdot e^{+j90^\circ}} = \frac{U}{I} \cdot e^{-j90^\circ} = Z \cdot e^{-j90^\circ}$$

$$\underline{Z} = Z \cdot \cos(-90^\circ) + j \cdot Z \cdot \sin(-90^\circ)$$

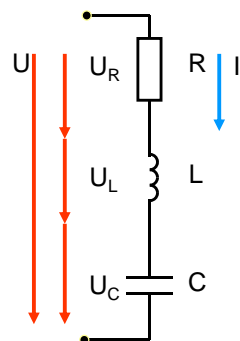
$$\underline{Z} = 0 - j \cdot X_C = X_C \cdot e^{-j90^\circ}$$



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j0^\circ}}{I \cdot e^{-j90^\circ}} = \frac{U}{I} \cdot e^{+j90^\circ} = Z \cdot e^{+j90^\circ}$$

$$\underline{Z} = Z \cdot \cos(+90^\circ) + j \cdot Z \cdot \sin(+90^\circ)$$

$$\underline{Z} = 0 + j \cdot X_L = X_L \cdot e^{+j90^\circ}$$



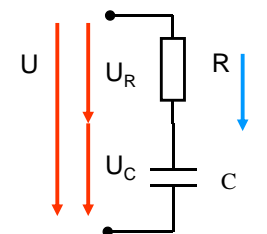
$$\underline{Z} = R + jX_L - jX_C$$

$$\underline{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C)$$

$$\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Der Strom über alle Elemente ist gleich.
Der Gesamtspannung ergibt sich aus der Summe der Teilspannungen.

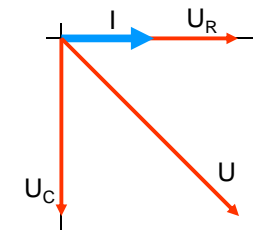


$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$$

$$U = \sqrt{I^2 \cdot R^2 + I^2 \cdot X_C^2}$$

$$U = I \cdot \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

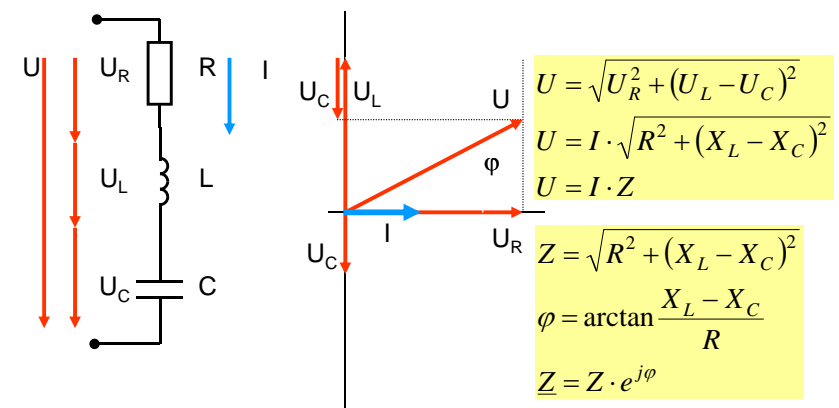
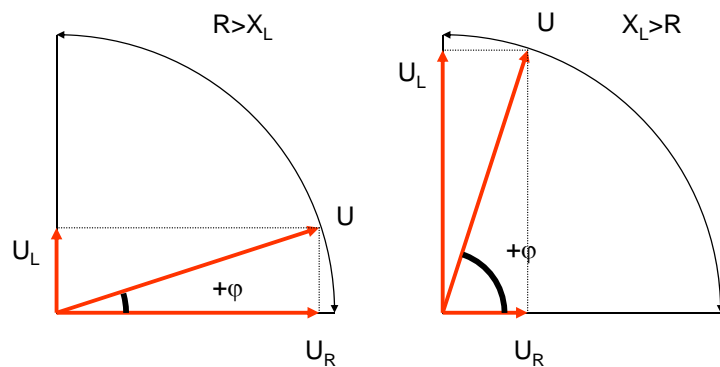
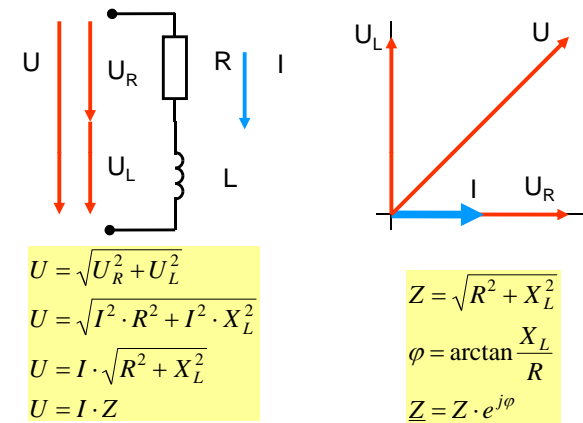
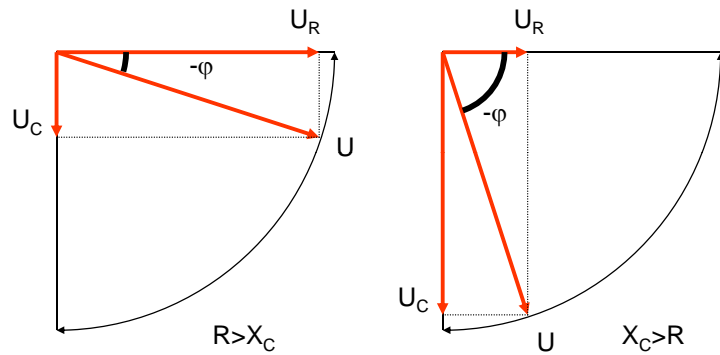
$$U = I \cdot Z$$

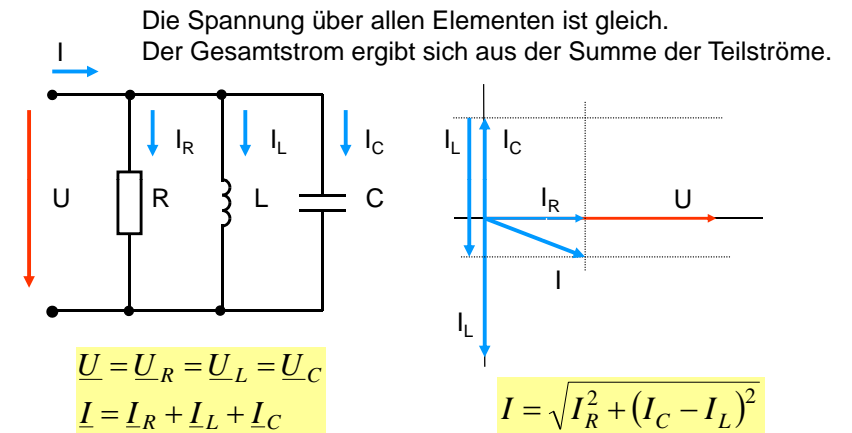
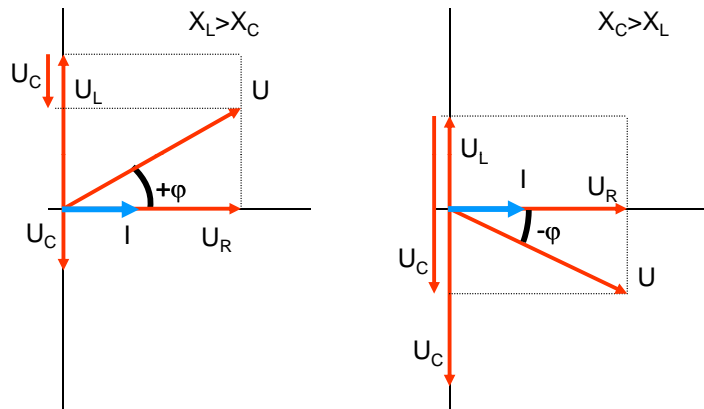


$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{-X_C}{R}$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$$





$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \quad I = \frac{U}{R}$$

$$\frac{U}{Z} = \sqrt{\left(\frac{U_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{U_C}{X_C} - \frac{U_L}{X_L}\right)^2} \quad U = U_R = U_L = U_C$$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \quad Y = \frac{1}{Z} \quad G = \frac{1}{R}$$

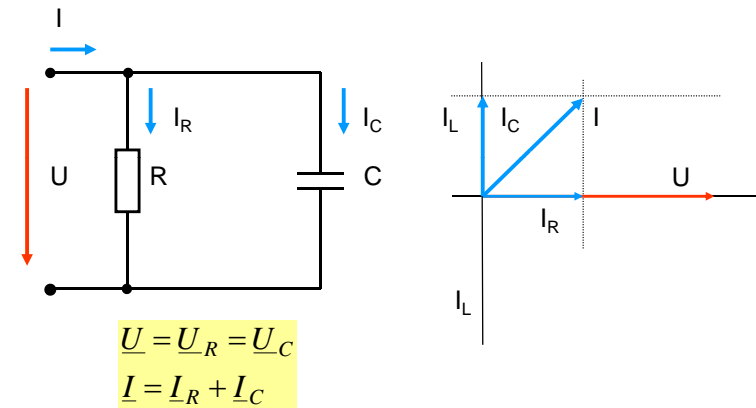
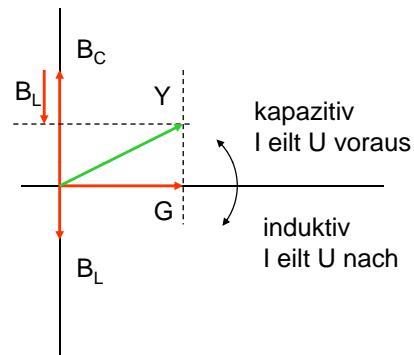
$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \quad B_C = \frac{1}{X_C} \quad B_L = \frac{1}{X_L}$$

$$\tan \varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{U \cdot (B_C - B_L)}{U \cdot G} = \frac{(B_C - B_L)}{G}$$

$$\varphi = \arctan \frac{(B_C - B_L)}{G}$$

$$\underline{Y} = Y \cdot e^{j\varphi}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{Y \cdot e^{j\varphi}} = \frac{1}{Y} \cdot e^{-j\varphi}$$

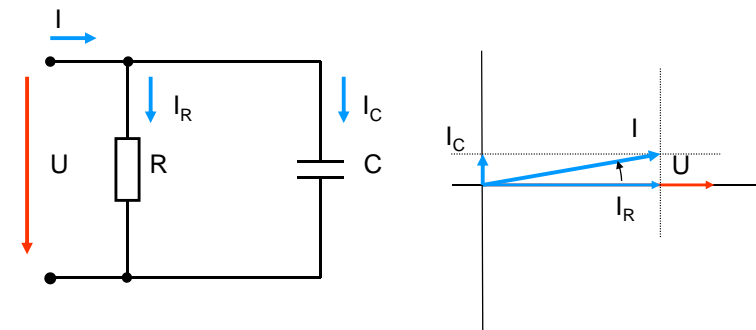


$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2}$$

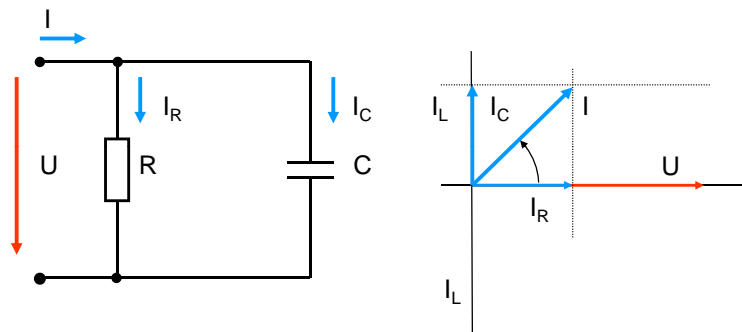
$$Y = \sqrt{G^2 + B_C^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{I_C}{I_R} = \frac{U \cdot B_C}{U \cdot G} = \frac{B_C}{G}$$

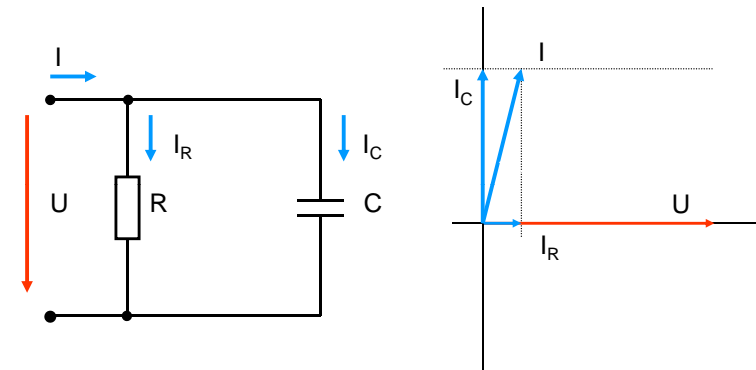
$$\underline{Y} = Y \cdot e^{j\varphi} \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{Y \cdot e^{j\varphi}} = \frac{1}{Y} \cdot e^{-j\varphi}$$



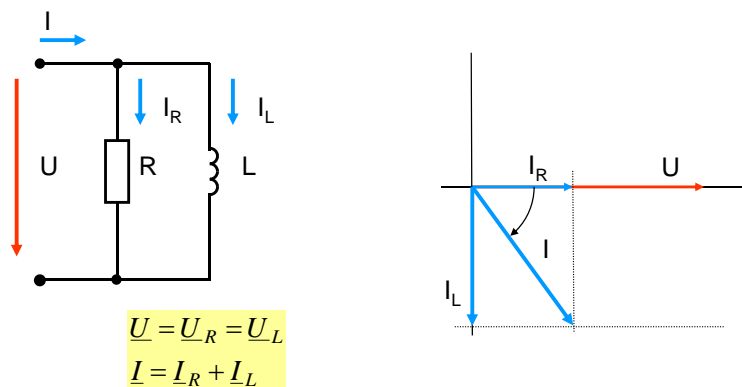
RC Schaltung



RC Schaltung



RL Schaltung



RL Schaltung

$$I = \sqrt{I_R^2 + (-I_L)^2} \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{X_L}\right)^2}$$

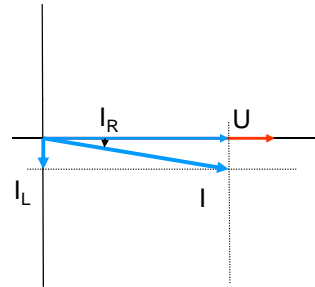
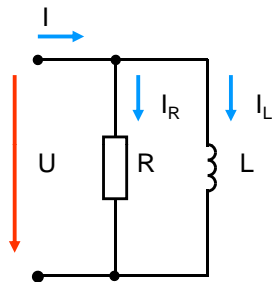
$$Y = \sqrt{G^2 + (-B_L)^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{-I_L}{I_R} = \frac{U \cdot (-B_L)}{U \cdot G} = \frac{-B_L}{G}$$

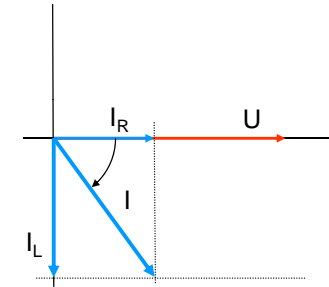
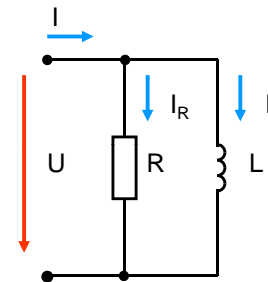
$$\varphi = \arctan \frac{-B_L}{G}$$

$$\underline{Y} = Y \cdot e^{j\varphi} \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{Y \cdot e^{j\varphi}} = \frac{1}{Y} \cdot e^{-j\varphi}$$

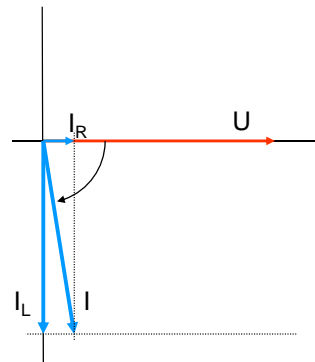
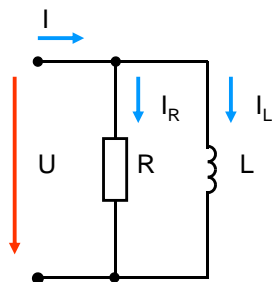
RL Schaltung



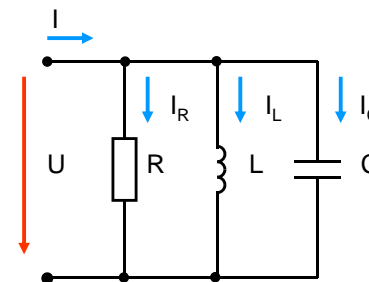
RL Schaltung



RL Schaltung

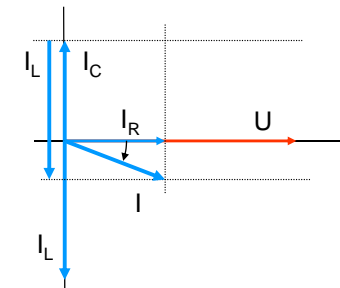


RLC Schaltung



$$\underline{U} = \underline{U}_R = \underline{U}_L = \underline{U}_C$$

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$$



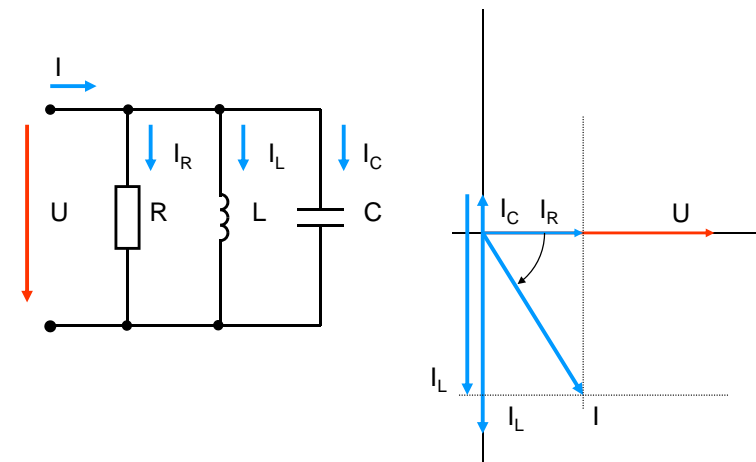
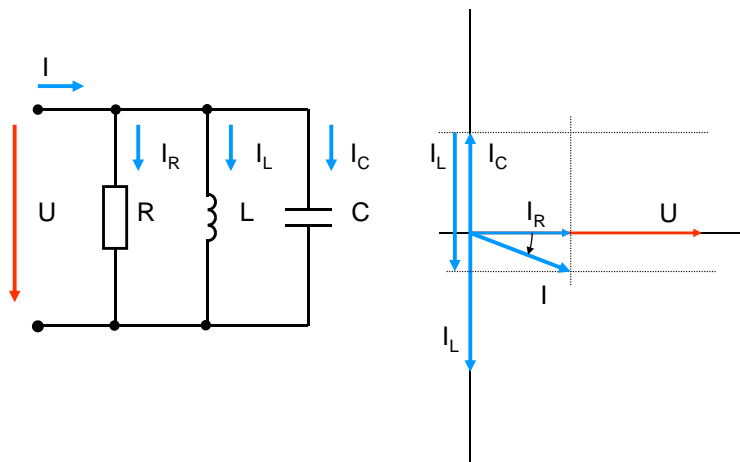
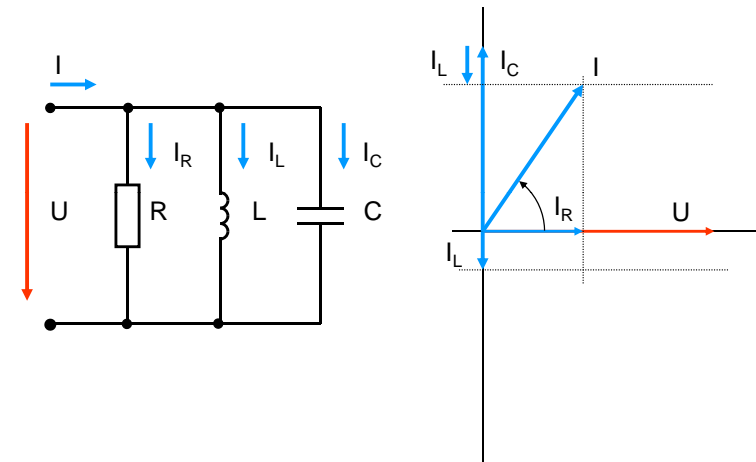
$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$$

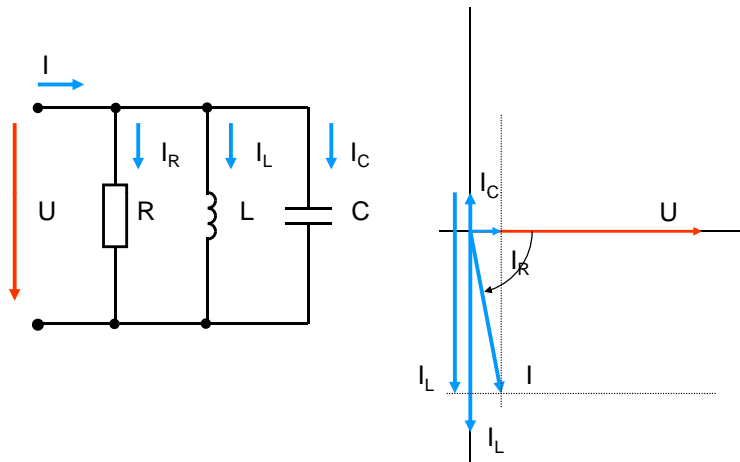
$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{U \cdot (B_C - B_L)}{U \cdot G} = \frac{(B_C - B_L)}{G}$$

$$\varphi = \arctan \frac{(B_C - B_L)}{G}$$

$$\underline{Y} = Y \cdot e^{j\varphi} \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{Y \cdot e^{j\varphi}} = \frac{1}{Y} \cdot e^{-j\varphi}$$





$$\underline{Z} = R_R + jX_R = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G_P - jB_P} \quad \text{mit } G_P + jB_P \text{ erweitern}$$

$$R_R + jX_R = \frac{G_P + jB_P}{G_P^2 + B_P^2} = \frac{G_P}{G_P^2 + B_P^2} + j \frac{B_P}{G_P^2 + B_P^2} \quad \begin{matrix} j^0 = +1 \\ j^1 = j \\ j^2 = -1 \\ j^3 = -j \\ j^4 = +1 \end{matrix}$$

$$R_R = \frac{G_P}{Y^2}$$

$$X_R = \frac{B_P}{Y^2}$$

$$\frac{1}{j} = j^{-1} = -j$$

$$-j \cdot j = 1$$

$$\underline{Y} = G_P - jB_P = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_R + jX_R} \quad \text{mit } R_R - jX_R \text{ erweitern}$$

$$G_P - jB_P = \frac{R_R - jX_R}{R_R^2 + X_R^2} = \frac{R_R}{Z^2} - j \frac{X_R}{Z^2}$$

$$G_P = \frac{R_R}{Z^2}$$

$$B_P = \frac{X_R}{Z^2}$$

$$j^0 = +1$$

$$j^1 = j$$

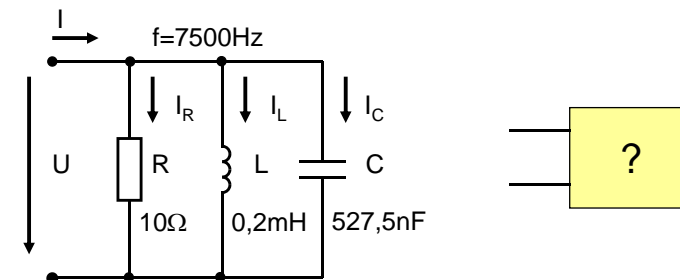
$$j^2 = -1$$

$$j^3 = -j$$

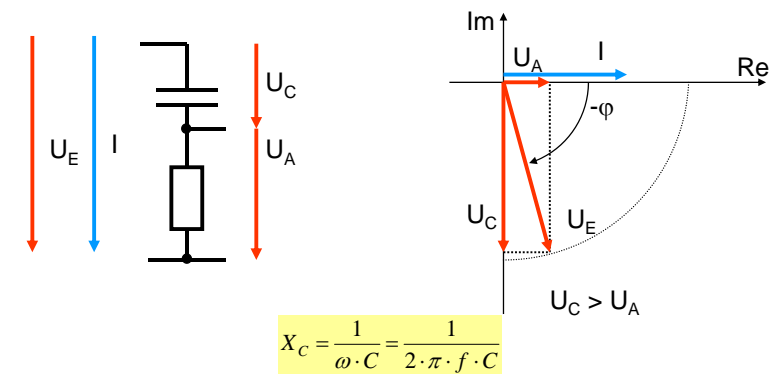
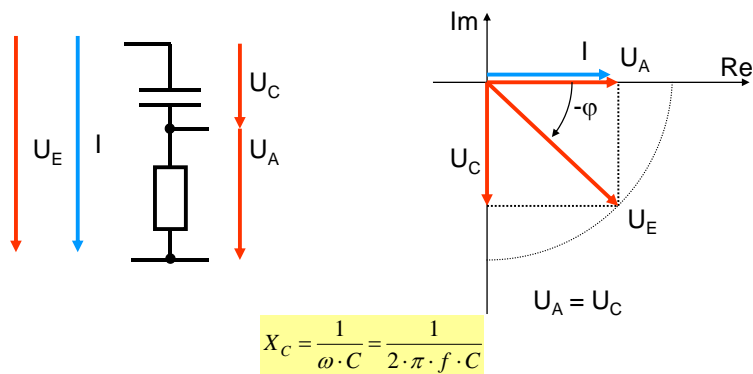
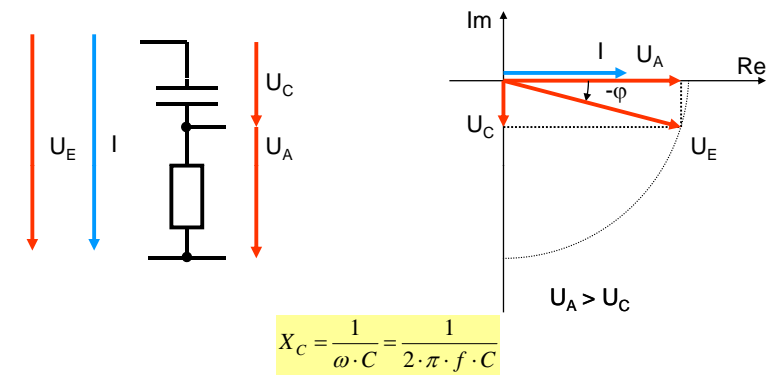
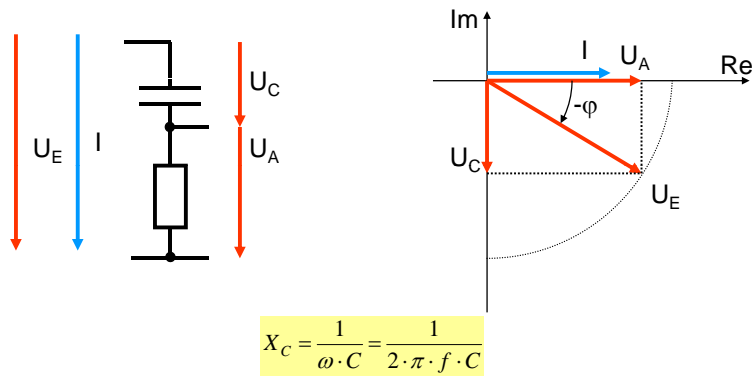
$$j^4 = +1$$

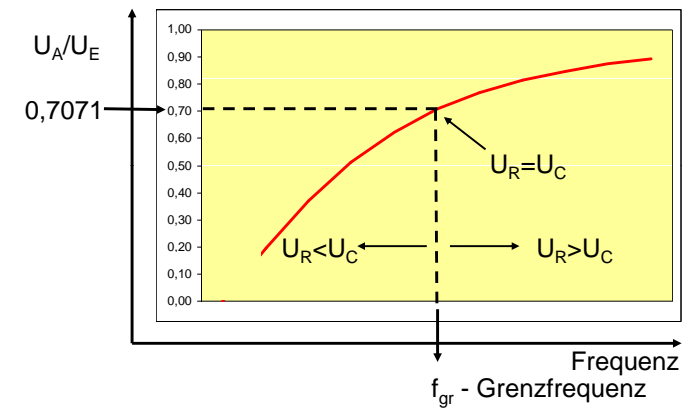
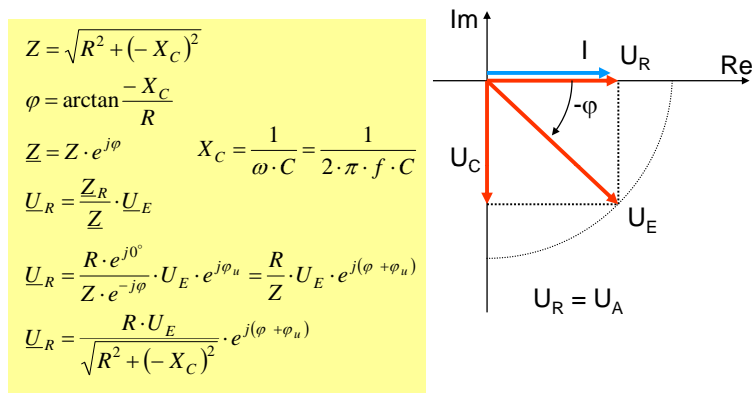
$$\frac{1}{j} = j^{-1} = -j$$

$$-j \cdot j = 1$$



Welche Phasenverschiebung ruft die Schaltung bei einer Frequenz von $f=7500\text{Hz}$ zwischen dem Gesamtstrom und der Spannung hervor, und durch welches Blindschaltelement (Kondensator oder Spule) und dem ohmschen Widerstand lässt sich für die angegebene Frequenz die Schaltung ersetzen.





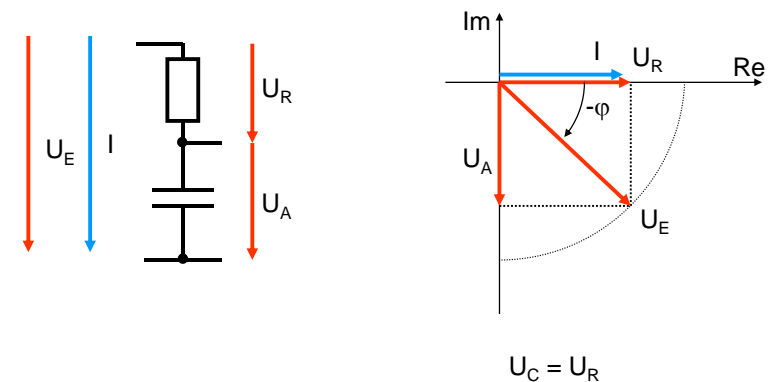
$$U_C = U_R$$

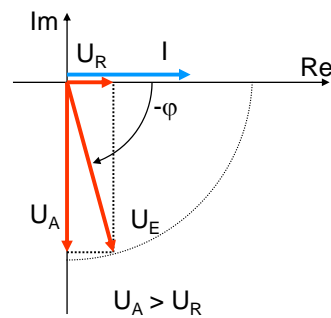
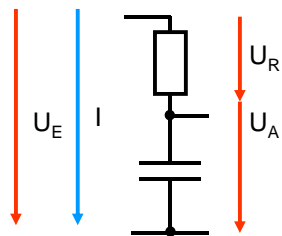
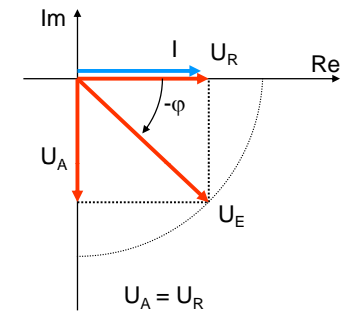
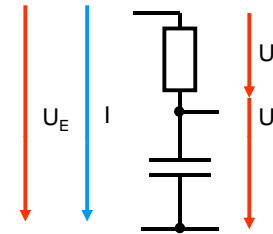
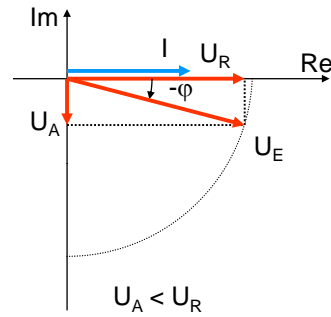
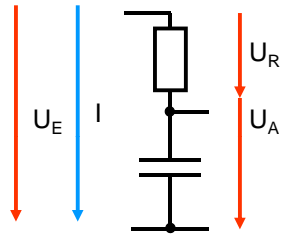
$$I \cdot X_C = I \cdot R$$

$$X_C = R$$

$$\frac{1}{\omega \cdot C} = R$$

$$f_{gr} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C \cdot R}$$





$$Z = \sqrt{R^2 + (-X_C)^2} \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

$$\varphi = \arctan \frac{-X_C}{R}$$

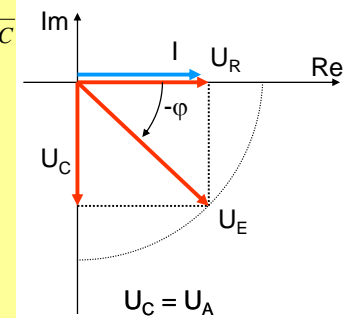
$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

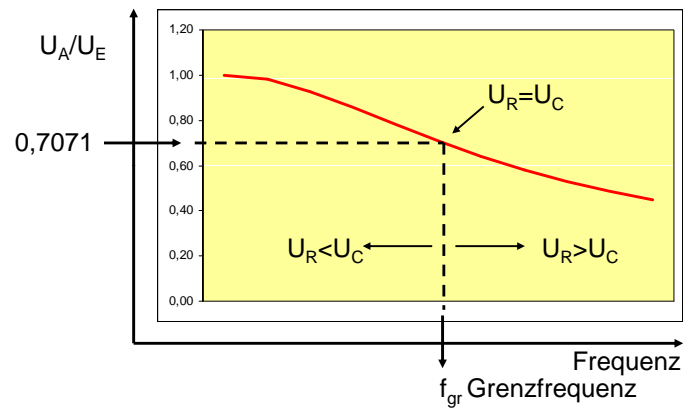
$$\underline{U}_C = \frac{\underline{Z}_C}{Z} \cdot \underline{U}_E$$

$$\underline{U}_C = \frac{X_C \cdot e^{-j90^\circ}}{Z \cdot e^{-j\varphi}} \cdot U_E \cdot e^{j\varphi_u}$$

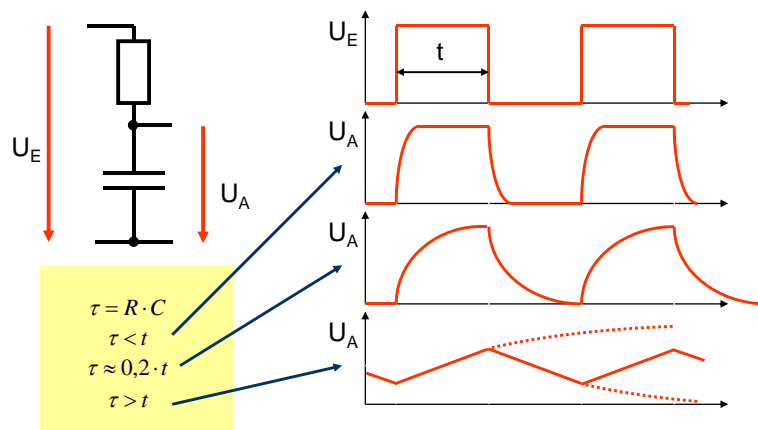
$$\underline{U}_C = \frac{X_C}{Z} \cdot U_E \cdot e^{j(-90^\circ + \varphi + \varphi_u)}$$

$$\underline{U}_C = \frac{X_C \cdot U_E}{\sqrt{R^2 + (-X_C)^2}} \cdot e^{j(-90^\circ + \varphi + \varphi_u)}$$

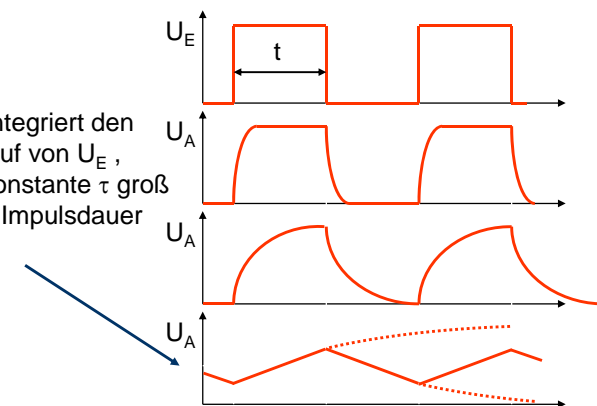


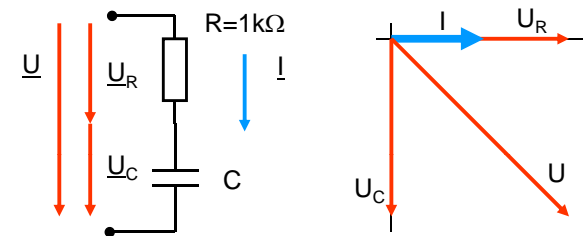
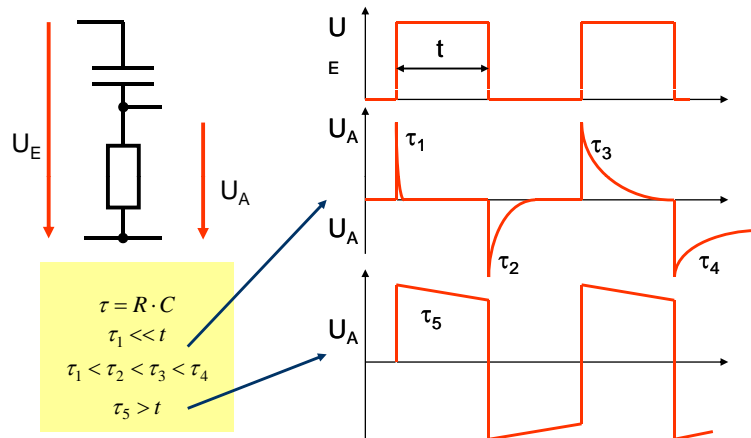


$$\begin{aligned} U_C &= U_R \\ I \cdot X_C &= I \cdot R \\ X_C &= R \\ \frac{1}{\omega \cdot C} &= R \\ f_{gr} &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C \cdot R} \end{aligned}$$



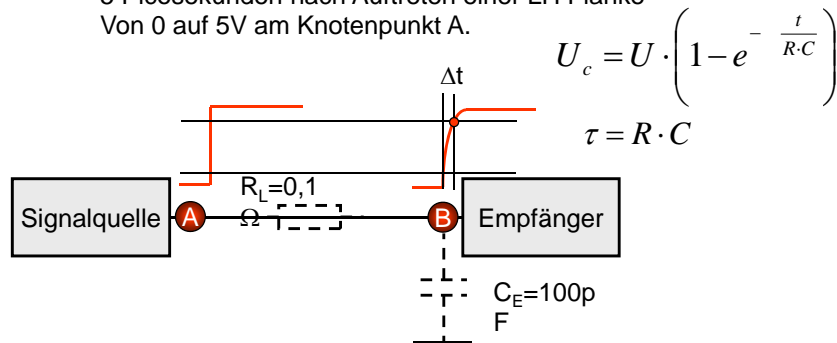
Ein RC-Glied integriert den zeitlichen Verlauf von U_E , wenn die Zeitkonstante τ groß gegenüber der Impulsdauer von U_E ist.





Berechnen Sie C für eine Grenzfrequenz von 1kHz.
Welche Phasenverschiebung zwischen U und U_C
ergibt sich für das berechnete C bei einer Frequenz von 20kHz?

Berechnen Sie die Spannung am Knotenpunkt B,
5 Picosekunden nach Auftreten einer LH Flanke
Von 0 auf 5V am Knotenpunkt A.



- Darstellung der Grundgrößen
 - Strom
 - Spannung
 - Frequenz
- Rechnen mit komplexen Zahlen
- Impedanz, Wirk- und Blindwiderstand
- Einfache Netzwerksberechnung
- Elektrisches Verhalten von
 - CR-Glieder
 - RC-Gliedern