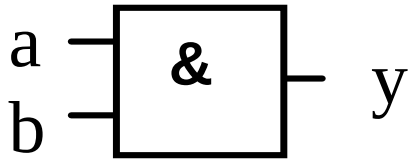
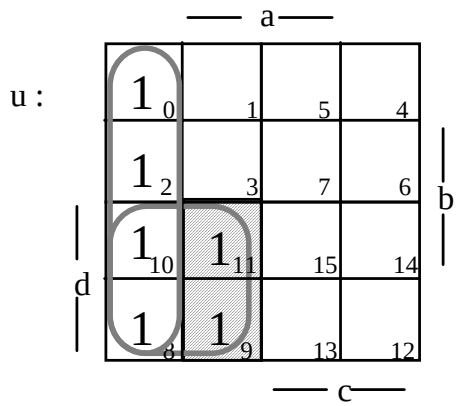


Kapitel 11: Schaltnetze



- Einführung in die formalen Grundlagen logischer Beschreibungen
  - Boolesche Algebra, Schaltalgebra
- Realisierung von Schaltnetzen auf Schalter- und Gatterebene
- Entwurf von Schaltnetzen
  - Logikminimierung, KV-Diagramme

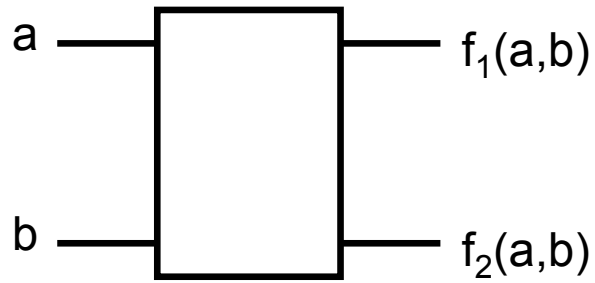
Schaltnetze

Schaltnetze:

rein kombinatorische logische Schaltungen

<u>kein</u> Speicherverhalten

logische Funktionen



$$f1(a,b) = (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$$
$$f2(a,b) = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$$

Beispiel:

Licht-Aus Warnung im Kraftfahrzeug

„Motor aus“ und „Tür auf“ und „Licht an“ $\Rightarrow$ Alarm

Boolesche Algebra

Freie Universität Berlin

Definition

Als eine Boolesche Algebra bezeichnet man eine Menge $V = \{a,b,c,...\}$, auf der zwei zweistellige Operationen $\oplus$ und $\otimes$ derart erklärt sind, dass durch ihre Anwendung auf Elemente aus V wieder Elemente aus V entstehen (Abgeschlossenheit).

Abgeschlossenheit: Für alle $a, b \in V$ gilt:

$$a \otimes b \in V$$

$$a \oplus b \in V$$

Weiterhin müssen die vier Huntingtonschen Axiome gelten.

Huntingtonsche Axiome

Freie Universität Berlin

H1 Kommutativgesetz

$a \otimes b = b \otimes a$

$a \oplus b = b \oplus a$

H2 Distributivgesetz

$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$

H3 Neutrales Element

Es existieren zwei Elemente $e, n \in V$, so dass gilt:

$a \otimes e = a$ (e wird Einselement genannt)

$a \oplus n = a$ (n wird Nullelement genannt)

H4 Inverses Element

Für alle $a \in V$ existiert ein Element $\bar{a} \in V$, so dass gilt:

$a \otimes \bar{a} = n$

$a \oplus \bar{a} = e$

Schaltalgebra

Die Schaltalgebra ist eine spezielle Boolesche Algebra, die durch folgende Korrespondenztabelle definiert wird:

Boolesche Algebra	**Schaltalgebra**
V	{0,1}
$\oplus$	$\vee$
$\otimes$	$\wedge$
n	0
e	1
$\bar{a}$	$\bar{a}$

Auch Schreibweise: a + b für $a \vee b$

a & b, ab für $a \wedge b$

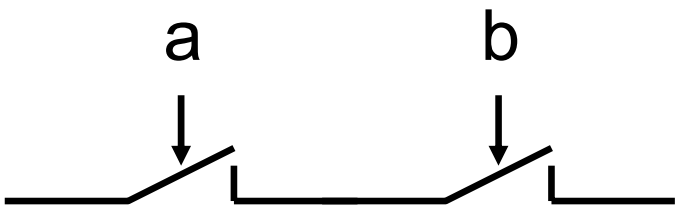
Schaltalgebra

Die Verknüpfungen können leicht in Funktionstabellen dargestellt werden:

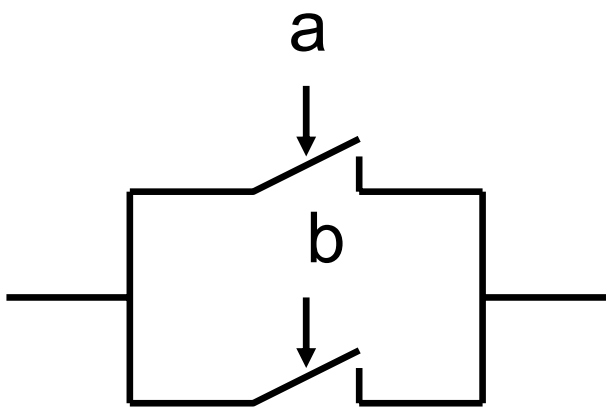
a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	$\bar{a}$
0	1
1	0



Technische Realisierung mit Schaltern



Schaltalgebra

Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra:

H1:	$a \vee b = b \vee a$
	$a \wedge b = b \wedge a$
H2:	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
H3:	$a \wedge 1 = a$
	$a \vee 0 = a$
H4:	$a \wedge \overline{a} = 0$
	$a \vee \overline{a} = 1$

Schaltalgebra

Aus den vier Huntingtonschen Axiomen lassen sich weitere Sätze ableiten:

Assoziativgesetz: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

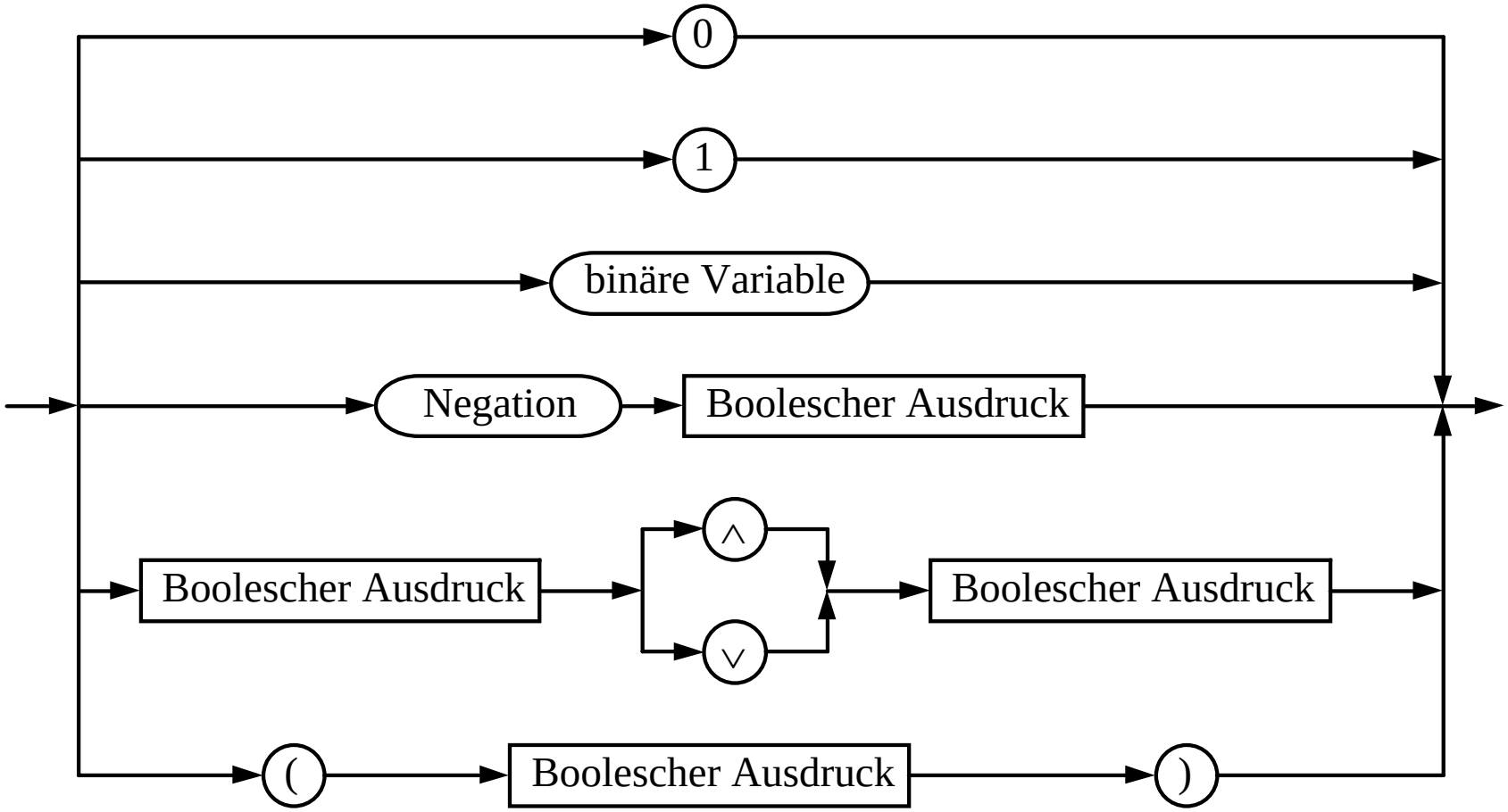
Idempotenzgesetz: $a \wedge a = a$
$a \vee a = a$

Absorptionsgesetz: $a \wedge (a \vee b) = a$
$a \vee (a \wedge b) = a$

DeMorgan-Gesetz: $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$
$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

Boolescher Ausdruck

Ein Boolescher Ausdruck ist eine Zeichenfolge, die aus binären Variablen, den Operatoren $\wedge$ und $\vee$ und Klammern besteht und syntaktische Regeln erfüllt, die durch folgendes Syntaxdiagramm gegeben sind:



Boolescher Ausdruck

Beispiele:

syntaktisch korrekte Boolesche Ausdrücke: $a \vee b$, 0, $(\bar{a} \wedge b) \vee c$

keine Booleschen Ausdrücke, da syntaktisch nicht korrekt:

$a \vee \vee a$, $1\ 0$, $(\ ) \vee c$

Für die Konstanten 0 und 1 verwendet man in der Schaltalgebra manchmal auch in Anlehnung an die Aussagenalgebra die Bezeichnung

Wahrheitswerte: 0 : falsch

1 : wahr

- Ein Boolescher Ausdruck hat in der Regel zunächst keinen Wahrheitswert, da er binäre Variable enthalten kann.
- Erst durch Belegung der binären Variablen mit Wahrheitswerten erhält der Boolesche Ausdruck einen Wahrheitswert.

Definitionen

- Die Belegung einer Menge von binären Variablen eines Booleschen Ausdrucks mit Wahrheitswerten bezeichnet man als Interpretation.

- Die Interpretation eines Booleschen Ausdrucks liefert eine Aussage, die entweder wahr oder falsch ist.

- Verschiedene Interpretationen eines Booleschen Ausdrucks können zu dem selben Wahrheitswert führen.

- Ein Boolescher Ausdruck, bei dem alle möglichen Interpretationen zum Wahrheitswert „wahr“ führen, heißt Tautologie.
  - Beispiel: $\overline{a} \vee a$ ist eine Tautologie.

Darstellung boolescher Funktionen

1. Durch eine Funktionstabelle
2. Durch einen algebraischen Ausdruck (symbolische Form)
3. Durch einen Graphen

Funktionstabelle

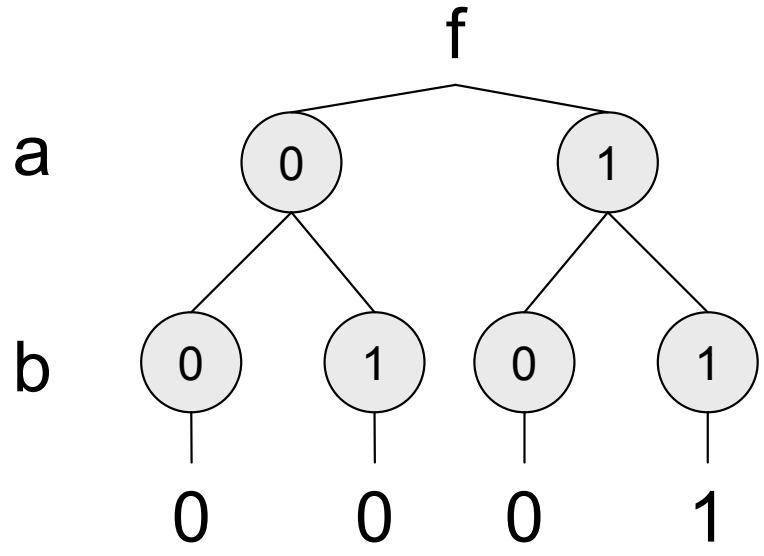
a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

symbolische Form

$f = a \wedge b$

Graph

(z.B. Shannon-Baum)



Boolesche Funktionen

Wie kommt man von der symbolischen Darstellung zur Funktionstabelle ?

Durch rekursive Auswertung des symbolischen Ausdrucks!

Konvention:

Negation vor Konjunktion und Konjunktion vor Disjunktion

Durch Klammern kann eine andere Reihenfolge der Auswertung festgelegt werden

$$a \vee b \wedge \overline{c}$$

$$a \vee b \boxed{\wedge \overline{c}}$$ Negation vor Konjunktion

$$a \vee \boxed{b \wedge \overline{c}}$$ Konjunktion vor Disjunktion

$$a \vee b \wedge \overline{c}$$

16 mögliche zweistellige boolesche Funktionen

x_1 x_0	0011 0101	verbale Form	symbolische Darstellung	Bezeichnung
f_0	0000	konstant 0	0	
f_1	0001	x_1 und x_0	$x_1 \wedge x_0$	Konjunktion
f_2	0010	nicht x_0, aber x_1	$x_1 \wedge \overline{x}_0$	Inhibition
f_3	0011	identisch x_1	x_1	Identität
f_4	0100	nicht x_1, aber x_0	$\overline{x}_1 \wedge x_0$	Inhibition
f_5	0101	identisch x_0	x_0	Identität
f_6	0110	x_1 ungleich x_0	$x_1 \not\leftrightarrow x_0$	Antivalenz, XOR
f_7	0111	x_1 oder x_0	$x_1 \vee x_0$	Disjunktion
f_8	1000	nicht (x_1 oder x_0)	$x_1 \overline{\vee} x_0$	NOR-Funktion, Peircescher Pfeil
f_9	1001	x_1 gleich x_0	$x_1 \leftrightarrow x_0$	Äquivalenz
f_{10}	1010	nicht x_0	$\overline{x}_0$	Negation
f_{11}	1011	wenn x_0, dann x_1	$x_0 \rightarrow x_1$	Implikation
f_{12}	1100	nicht x_1	$\overline{x}_1$	Negation
f_{13}	1101	wenn x_1, dann x_0	$x_1 \rightarrow x_0$	Implikation
f_{14}	1110	nicht (x_1 und x_0)	$x_1 \overline{\wedge} x_0$	NAND-Funktion, Shefferscher Strich
f_{15}	1111	konstant 1	1	Tautologie

Vollständige Operatorensysteme

Freie Universität Berlin

Definition:

Ein System von Operatoren, mit dem alle booleschen Funktionen dargestellt werden können, heißt vollständiges Operatorensystem.

Die Operatoren ($\wedge$, $\vee$, $\overline{}$) bilden ein vollständiges Operatorensystem.

Operatoren-system	Darstellung der ...		
	Negation	Konjunktion	Disjunktion
($\wedge$, $\vee$, $\overline{}$)	$\bar{a}$	$a \wedge b$	$a \vee b$
($\wedge$, $\overline{}$)	$\bar{a}$	$a \wedge b$	$\overline{\bar{a} \wedge \bar{b}}$
($\vee$, $\overline{}$)	$\bar{a}$	$\overline{\bar{a} \vee \bar{b}}$	$a \vee b$
($\bar{\wedge}$)	$a \bar{\wedge} a$	$(a \bar{\wedge} b) \bar{\wedge} (a \bar{\wedge} b)$	$(a \bar{\wedge} a) \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} b)$
($\bar{\vee}$)	$a \bar{\vee} a$	$(a \bar{\vee} a) \bar{\vee} (b \bar{\vee} b)$	$(a \bar{\vee} b) \bar{\vee} (a \bar{\vee} b)$
($\wedge$, $\not\leftrightarrow$)	$a \not\leftrightarrow 1$	$a \wedge b$	$a \not\leftrightarrow b \not\leftrightarrow (a \wedge b)$

a	y
0	0
1	1

a	b			y
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

a	b			y
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

Tautologie

- Wann repräsentieren zwei Ausdrücke A und B dieselbe Boolesche Funktion?

- Gleichbedeutend:

  Ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie?

- Gegeben zwei Boolesche Funktionen:

$$f_1(a,b) = (a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})$$
$$f_2(a,b) = (a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$$

- Ist f_1 identisch mit f_2

  oder

  Ist $(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) \leftrightarrow (a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$ eine Tautologie?

Tautologie

Beweis mit Hilfe von Funktionstabellen oder mittels Umformungen von Ausdrücken unter Verwendung der algebraischen Gesetze.

Zwei Ausdrücke sind äquivalent, falls die Ergebnisse ihrer Auswertung für alle möglichen Kombinationen von Variablenbelegungen identisch sind.

$$X = f_1(a,b) = (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

$$Y = f_2(a,b) = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$$

a b	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	$(a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$	$x \leftrightarrow y$
0 0	1	1	1
0 1	0	0	1
1 0	0	0	1
1 1	1	1	1

Tautologie

mittels algebraischer Umformung: $f_1(a,b) = f_2(a,b)$

$$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$$

$$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) = [(a \wedge b) \vee \bar{a}] \wedge [(a \wedge b) \vee \bar{b}]$$

(Distributivgesetz)

$$= [\boxed{(a \vee \bar{a})} \wedge (b \vee \bar{a})] \wedge [(a \vee \bar{b}) \wedge \boxed{(b \vee \bar{b})}]$$

(Distributivgesetz)

$$= [\boxed{1} \wedge (b \vee \bar{a})] \wedge [(a \vee \bar{b}) \wedge \boxed{1}]$$

(Inverses Element)

$$= (b \vee \bar{a}) \wedge (a \vee \bar{b})$$

(Neutrales Element)

$$= (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})$$

(Kommutativgesetz)

$$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$$

KNF und DNF Normalformen

Freie Universität Berlin

Eine boolesche Funktion kann durch verschiedene boolesche Ausdrücke beschrieben werden.

Beispiel: $f_1(a,b) = (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$

$f_2(a,b) = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$

Eine Standarddarstellung boolescher Funktionen im vollständigen Operatorensystem ($\wedge$, $\vee$, $\bar{\ }$) ist die

konjunktive (KNF) und die

disjunktive Normalform (DNF).

Definition:

Ein Literal L_i ist entweder eine Variable x_i oder ihre Negation $\bar{x}_i$

d.h. $L_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$

KNF und DNF
Literale und Produktterme

Falls $L_h = x$, $L_j = x$, $h \neq j$ (mehrfach bejahtes Auftauchen)

$\Rightarrow \quad L_h \wedge L_j = x$

$\Rightarrow \quad K(x_1,\ldots,x_m) = \bigwedge_{i=1}^{m} L_i$

Mehrfaches Auftauchen von x kann nach

Idempotenzgesetz: $a \wedge a = a$

$a \vee a = a$

gestrichen werden.

Falls $L_h = x$ und $L_j = \overline{x}$ (gemischtes bejahtes und negiertes Auftreten)

$\Rightarrow L_h \wedge L_j = 0$

$\Rightarrow K(x_1,\ldots,x_m) = 0$

Produktterm wird zu 0 nach Huntingtonschem Axiom H4: $a \wedge \overline{a} = 0$.

KNF und DNF Definitionen

Ein Produkttherm $K(x_1,...,x_m)$ ist die Konjunktion von Literalen

$$\bigwedge_{i\in\{1,...,m\}} L_i = L_1 \wedge \ldots \wedge L_m$$

oder der Konstanten "0" oder "1"

Ein Produktterm $K(x_1,...,x_n)$ heißt Implikant einer Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_n)$, wenn $K \rightarrow y$

Das heißt, für jede Belegung $B \in \{0,1\}^n$ gilt:
Wenn $K(B) = 1$, dann ist auch $y(B) = 1$

Ein Implikant einer Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_n)$ heißt Minterm, wenn ein Literal jeder Variablen x_i der Funktion y im Implikanten genau einmal vorkommt.

Der Therm $D(x_1,...,x_m)$ ist eine Disjunktion von Literalen

$$\bigvee_{i\in\{1,...,m\}} L_i = L_1 \vee \ldots \vee L_m$$

oder der Konstanten "0" oder "1"

Der Term $D(x_1,...,x_m)$ heißt Implikat einer Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_m)$, wenn $\overline{D} \rightarrow \overline{y}$

Das heißt für jede Belegung $B \in \{0,1\}^n$ gilt:
Wenn $D(B) = 0$, dann ist auch $y(B)=0$.

Ein Implikat einer Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_m)$ heißt Maxterm, wenn ein Literal jeder Variable x_i der Funktion y im Implikaten genau einmal vorkommt.

KNF und DNF
Beispiel Min- und Maxterme

Minterme einer Booleschen Funktion $y(x_1,\ldots,x_4)$:

$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$

$x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$

Keine Minterme der Booleschen Funktion $y(x_1,\ldots,x_4)$:

$x_1 \wedge x_2$

$x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_3 \wedge x_4$

Maxterme einer Booleschen Funktion $y(x_1,\ldots,x_3)$:

$x_1 \vee x_2 \vee x_3$

$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$

KNF und DNF
Maxterm und Minterm

Der Maxterm einer KNF läßt sich für jede Zeile der Funktionstabelle bilden die den Funktionswert 0 liefert.

Herkunft der Bezeichnung Maxterm:

Funktionen aus genau einem Maxterm liefern für genau eine Belegung den Funktionswert 0, d.h. abgesehen von der trivialen Einsfunktion haben sie die maximale Anzahl an Einsen.

Der Minterm einer DNF läßt sich für jede Zeile der Funktionstabelle bilden die den Funktionswert 1 liefert.

Herkunft der Bezeichnung Minterm:

Funktionen aus genau einem Minterm liefern für genau eine Belegung den Funktionswert 1, d.h. abgesehen von der trivialen Nullfunktion haben sie eine minimale Anzahl an Einsen.

KNF und DNF
Definition

Freie Universität Berlin

Konjunktive Normalform KNF

Es sei eine Boolesche Funktion $y(x_1,...,x_m)$ gegeben.
Ein Boolescher Ausdruck heißt konjunktive Normalform (KNF) der Funktion y, wenn er aus einer konjunktiven Verknüpfung aller Maxterme D_i besteht:

$$y = D_0 \wedge D_1 \wedge ..... \wedge D_k \quad , k \leq 2^n-1$$

Es darf dabei keine zwei Disjunktionen D_i, D_j mit $i \neq j$ geben, die zueinander äquivalent sind.

Disjunktive Normalform DNF

Es sei eine Boolesche Funktion $y(x_1,...,x_n)$ gegeben.
Ein Boolescher Ausdruck heißt disjunktive Normalform (DNF) der Funktion y, wenn er aus einer disjunktiven Verknüpfung aller Minterme K_i besteht:

$$y = K_0 \vee K_1 \vee ..... \vee K_k \quad , \quad k \leq 2^n-1$$

Es darf dabei keine zwei Konjunktionen K_i, K_j mit $i \neq j$ geben, die zueinander äquivalent sind.

KNF und DNF
Begriffe

Operatoren $\wedge, \vee, \overline{}$

Literale

Boolesche Funktion $y = f(a,b,c,d) = a \wedge b \vee b \wedge (\overline{c} \vee d) \vee a \wedge b \wedge c \wedge \overline{d}$

Maxterme

KNF Konjunktive Normalform $y = (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{b} \vee c) \wedge (\overline{b} \vee \overline{d}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c} \vee d)$

Implikat: Term, der für jede Belegung der Variablen, 0 ergibt, wenn auch die dazu gehörige boolsche Funktion 0 ergibt.

Maxterm: Zeile in der Funktionstabelle, wo das Resultat = 0

Minterme

Produkttherme

DNF Disjunktive Normalform $y = (a \wedge b) \vee (b \wedge \overline{c}) \vee (b \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge \overline{d})$

Produktterm: Konjunktion von Literalen

Implikant: Produkttherm, wenn alle Variablen einer Funktion vorkommen.

Minterm: Zeile in der Funktionstabelle, wo das Resultat = 1

KNF und DNF
Funktionstabelle

c b a	y	Minterme	Maxterme
0 0 0	1	$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$	
0 0 1	0		$\bar{a} \vee b \vee c$
0 1 0	0		$a \vee \bar{b} \vee c$
0 1 1	1	$a\ b\ \bar{c}$	
1 0 0	1	$\bar{a}\ \bar{b}\ c$	
1 0 1	0		$\bar{a} \vee b \vee \bar{c}$
1 1 0	0		$a \vee \bar{b} \vee \bar{c}$
1 1 1	1	$a\ b\ c$	

DNF: $y = (\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}) \vee (a\ b\ \bar{c}) \vee (\bar{a}\ \bar{b}\ c) \vee (a\ b\ c)$

KNF: $y = (\bar{a} \vee b \vee c)(a \vee \bar{b} \vee c)(\bar{a} \vee b \vee \bar{c})(a \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

KNF und DNF aus der Funktionstabelle

Freie Universität Berlin

DNF:

Aus der Funktionstabelle einer Funktion erhält man die Minterme, indem man in allen Zeilen mit dem Funktionswert 1 jeweils alle Eingangsvariablen mit $\wedge$ verknüpft und dabei Eingangsvariablen mit dem Wert 0 negiert.

Durch die disjunktive Verknüpfung dieser Minterme kann ein Boolescher Funktionsausdruck in DNF hergeleitet werden.

KNF:

Aus der Funktionstabelle einer Funktion erhält man die Maxterme, indem man in allen Zeilen mit dem Funktionswert 0 jeweils alle Eingangsvariablen mit $\vee$ verknüpft und dabei Eingangsvariablen mit dem Wert 1 negiert.

Durch die konjunktive Verknüpfung dieser Maxterme kann ein Boolescher Funktionsausdruck in KNF hergeleitet werden.

KNF oder DNF aus beliebiger Form

Freie Universität Berlin

Um Funktionen aus der DF bzw. KF in die DNF bzw. KNF zu überführen, ist der Shannonsche Entwicklungssatz behilflich.

Entwicklung nach der Variablen x_i:

- die Variable wird in der Funktion auf den Wert 1 gesetzt,
- der entstehende Term konjunktiv mit x_i verknüpft,

$\vee$ -verknüpft mit:

- die Variable wird in der Funktion auf den Wert 0 gesetzt und
- der entstehende Term konjunktiv mit $\overline{x}_i$ verknüpft

$$y = f(x_1,\ldots, x_n)$$
$$= [\, x_i \wedge f(x_1 ,\ldots, x_{i-1} , \mathbf{1}, x_{i+1} ,\ldots, x_n)] \vee [\, \overline{x}_i \wedge f(x_1 ,\ldots, x_{i-1} , \mathbf{0}, x_{i+1} ,\ldots, x_n)]$$

KNF oder DNF aus beliebiger Form am Beispiel

Freie Universität Berlin

$$y = a\,\bar{b}\,c \vee \bar{a}\,\bar{b} \vee b\,c$$

$$= a\,[1\,\bar{b}\,c \vee \bar{1}\,\bar{b} \vee b\,c] \vee \bar{a}\,[0\,\bar{b}\,c \vee \bar{0}\,\bar{b} \vee b\,c]$$

$$= a\,[\bar{b}\,c \vee b\,c] \vee \bar{a}\,[\bar{b} \vee b\,c]$$

$$= a\,[b\,(c) \vee \bar{b}\,(c)] \vee \bar{a}\,[b\,(c) \vee \bar{b}\,(1)]$$

$$= a\,[b\,(c) \vee \bar{b}\,(c)] \vee \bar{a}\,[b\,c \vee \bar{b}\,(c \vee \bar{c})]$$

$$= a\,b\,c \vee a\,\bar{b}\,c \vee \bar{a}\,b\,c \vee \bar{a}\,\bar{b}\,c \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$$

DNF und KNF

Disjunktive und konjunktive Normalformen sind eindeutige Darstellungen!

bis auf Permutationen (z.B. abc, acb, bac, bca, cab, cba sind äquivalent)

Beispiel:

$$y = a\ \bar{b} \vee c$$

DNF: $y = \bar{a}\ \bar{b}\ c \vee \bar{a}\ b\ c \vee a\ \bar{b}\ \bar{c} \vee a\ \bar{b}\ c \vee a\ b\ c$

KNF: $y = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)$

DNF und KNF

In einer Funktion mit n Variablen können bis zu 2^n Minterme bzw. Maxterme auftreten. Für n = 3 sind diese:

	Minterm	Maxterm
0	$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$	$a \vee b \vee c$
1	$a\ \bar{b}\ \bar{c}$	$\bar{a} \vee b \vee c$
2	$\bar{a}\ b\ \bar{c}$	$a \vee \bar{b} \vee c$
3	$a\ b\ \bar{c}$	$\bar{a} \vee \bar{b} \vee c$
4	$\bar{a}\ \bar{b}\ c$	$a \vee b \vee \bar{c}$
5	$a\ \bar{b}\ c$	$\bar{a} \vee b \vee \bar{c}$
6	$\bar{a}\ b\ c$	$a \vee \bar{b} \vee \bar{c}$
7	$a\ b\ c$	$\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}$

DNF und KNF

Um eine Funktion zu beschreiben, reicht die Angabe aller Minterme oder aller Maxterme aus.

Nr.	a b c	y	Minterme	Maxterme
0	0 0 0	1	$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$	
1	1 0 0	0		$\bar{a} \vee b \vee c$
2	0 1 0	0		$a \vee \bar{b} \vee c$
3	1 1 0	1	$a\ b\ \bar{c}$	
4	0 0 1	1	$\bar{a}\ \bar{b}\ c$	
5	1 0 1	0		$\bar{a} \vee b \vee \bar{c}$
6	0 1 1	0		$a \vee \bar{b} \vee \bar{c}$
7	1 1 1	1	$a\ b\ c$	

DNF: $y = (\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}) \vee (a\ b\ \bar{c}) \vee (\bar{a}\ \bar{b}\ c) \vee (a\ b\ c)$

KNF: $y = (\bar{a} \vee b \vee c)(a \vee \bar{b} \vee c)(\bar{a} \vee b \vee \bar{c})(a \vee \bar{b} \vee \bar{c})$

DNF und KNF

Freie Universität Berlin

Verkürzte Schreibweise:

nur die Indizes (Binärkodierungen der (c, b, a) - Belegung) der 1- oder 0-Stellen der Funktion

Voraussetzung:

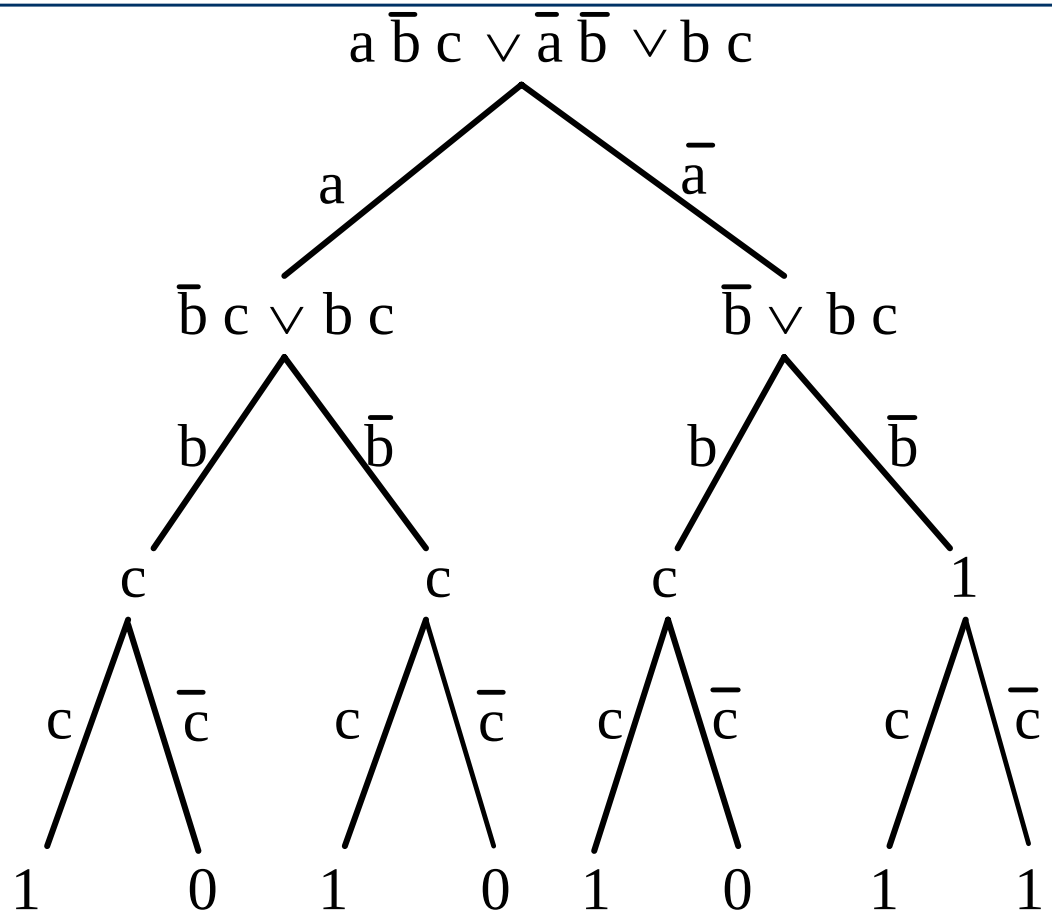
Eindeutige Reihenfolge der Variablen.

Beispiel (Reihenfolge der drei Variablen c, b, a)

y = MINt(0, 3, 4, 7)

y = MAXt(1, 2, 5, 6)

Beispiel: Shannon-Baum



Nachdem die Funktion nach allen Variablen entwickelt wurde, können die Minterme durch Verfolgen der Äste des Baums gefunden werden, die zu einer 1 führen.

DMF und KMF

Ziele:

„Möglichst kurze“ Boolesche Ausdrücke für eine gegebene Boolesche Funktion.

Technische Realisierung einer Schaltung mit möglichst geringen Kosten.

Ähnlich zum Aufbau der disjunktiven und konjunktiven Normalform gibt es eine disjunktive (DMF) und konjunktive (KMF) Minimalform.

DMF und KMF
Kostenfunktion

Gegeben:

Eine Boolesche Funktion $y(x_1,...,x_n)$
und die
Kostenfunktionen $\Psi_{UND}(k)$ und $\Psi_{ODER}(k)$,
die Realisierungskosten einer k-stelligen UND- bzw. ODER Verknüpfung (Kosten für die Negation einer Variablen seien vernachlässigt).

Ziel der Minimalform ist es die geringst möglichen Kosten zu erreichen.

DMF und KMF Definition

Ein Ausdruck ist in disjunktiver Minimalform (Abk.: DMF), wenn er eine Disjunktion von Konjunktionen

$y(x_1,\ldots,x_n) = (L_{11} \cdot \ldots \cdot L_{1k}) \vee \ldots \vee (L_{m1} \cdot \ldots \cdot L_{mj})$

mit den Literalen $L_{vw} \in \{ x_1,\ldots, x_n, \bar{x}_1,\ldots, \bar{x}_n\}$

darstellt und die Realisierungskosten

$Y_y = \Psi_{ODER}(m) + \Psi_{UND}(k) + \ldots + \Psi_{UND}(j)$

minimal sind.

Ein Ausdruck ist in konjunktiver Minimalform (Abk.: KMF), wenn er eine Konjunktion von Disjunktionen

$y(x_1,\ldots,x_n) = (L_{11} \vee \ldots \vee L_{1k}) \cdot \ldots \cdot (L_{m1} \vee \ldots \vee L_{mj})$

mit den Literalen $L_{vw} \in \{ x_1 ,\ldots, x_n, \bar{x}_1 ,\ldots, \bar{x}_n\}$

darstellt und die Realisierungskosten

$Y_y = \Psi_{UND}(m) + \Psi_{ODER}(k) + \ldots + \Psi_{ODER}(j)$

minimal sind.

DMF und KMF
Beispiele

Freie Universität Berlin

<u>Kostenmaß: Anzahl der auftretenden Gatter</u>

Es sei $\Psi_{UND}(k) = \Psi_{ODER}(k) = k$, k: Anzahl Gattereingänge

Beispiel DMF:

$y_1 = \bar{a}\, b \vee a\, \bar{b}$
ist in disjunktiver Minimalform,

$y_2 = \bar{a}\, b \vee a\, b$ jedoch nicht,

da y_2 auch kürzer durch

$y_2 = b$

ausgedrückt werden kann.

Beispiel KMF:

$y_1 = (\bar{a} \vee b)\,(a \vee c)$
ist in konjunktiver Minimalform,

$y_2 = \bar{a}\,(\bar{a} \vee c)\,(b \vee c)$ jedoch nicht,

da y_2 auch kürzer durch

$y_2 = \bar{a}\,(b \vee c)$

ausgedrückt werden kann.

DMF und KMF
Minimalformen sind nicht eindeutig

Es kann mehrere disjunktive und konjunktive Minimalformen für die gleiche Funktion geben.

Beispiel:

$y = a\,\overline{b} \vee b\,\overline{c} \vee \overline{a}\,c$ und

$y = a\,\overline{c} \vee \overline{b}\,c \vee \overline{a}\,b$

stellen dieselbe Funktion dar, beides sind disjunktive Minimalformen.

DMF und KMF
Unterschiedliche Kosten von

Freie Universität Berlin

Die Kosten für eine disjunktive und eine konjunktive Minimalform derselben Funktion sind im Allgemeinen unterschiedlich.

Es sei $\Psi_{UND}(k) = \Psi_{ODER}(k) = 2\cdot(k+1)$ und k ist die Anzahl der Gattereingänge

$y = a\,b\,c \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ disjunktive Minimalform

$y(x_1,\ldots,x_n) = (L_{11}\cdot\ldots\cdot L_{1k}) \vee\ldots\vee (L_{m1}\cdot\ldots\cdot L_{mj})$

$\Psi y = \Psi_{ODER}(m) + \Psi_{UND}(k) + \ldots + \Psi_{UND}(j)$

$\Psi y = 6 + 8 + 8 = 22$

$y = (\bar{a} \vee b)(a \vee \bar{c})(\bar{b} \vee c)$ konjunktive Minimalform

$y(x_1,\ldots,x_n) = (L_{11} \vee \ldots \vee L_{1k}) \cdot \ldots \cdot (L_{m1} \vee\ldots\vee L_{mj})$

$\Psi y = \Psi_{UND}(m) + \Psi_{ODER}(k) + \ldots + \Psi_{ODER}(j)$

$\Psi y = 8 + 6 + 6 + 6 = 26$

NAND/NOR-Konversion

Freie Universität Berlin

($\overline{\wedge}$)-System (NAND-System) und ($\overline{\vee}$)-System (NOR-System) sind vollständige Operatorensysteme

⇨ beliebige disjunktive und konjunktive Ausdrücke können mit NAND- und NOR-Verknüpfungen dargestellt werden.

Überführungen (vier Fälle):

1. Fall: Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System
2. Fall: Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\vee}$)-System
3. Fall: Funktion in konjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\vee}$)-System
4. Fall: Funktion in konjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System

Warum das alles?

⇨ Einfache Implementierung in Hardware!

NANDs/NORs sind sehr einfach in CMOS-Schaltungen realisierbar.

NAND-Konversion

1.Fall Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System

Freie Universität Berlin

1. Fall: Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System

Gegeben: Boolsche Funktion in disjunktiver Form.

$$Y = \overline{a}\, b\, c \vee a\, \overline{b}\, c \vee a\, b\, \overline{c} \vee \overline{a}\, \overline{b}\, \overline{c}$$

Überführung:

1. Doppelte Negation und
2. anschließende Anwendung der DeMorganschen Regeln

Dann erhält man einen Ausdruck, der nur noch NAND als Operator enthält.

NAND-Konversion

1.Fall Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System

$$y = \overline{\overline{\bar{a}\,b\,c \vee a\,\bar{b}\,c \vee a\,b\,\bar{c} \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}}}$$

$$= \overline{\overline{\bar{a}\,b\,c \vee a\,\bar{b}\,c \vee a\,b\,\bar{c} \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}}}$$

$$= \overline{\overline{\bar{a}\,b\,c} \wedge \overline{a\,\bar{b}\,c} \wedge \overline{a\,b\,\bar{c}} \wedge \overline{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}}}$$

$$= \mathrm{NAND}_4(\mathrm{NAND}_3(\bar{a}, b, \bar{c}), \mathrm{NAND}_3(a, \bar{b}, c), \mathrm{NAND}_3(a, b, \bar{c}), \mathrm{NAND}_3(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}))$$

Dabei ist $\mathrm{NAND}_k(x_1,\ldots,x_k)$ eine k-stellige Funktion, für die gilt:

$$\mathrm{NAND}_k(x_1,\ldots,x_k) \begin{cases} 0 \text{ für } x_1 = \ldots = x_k = 1 \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

NAND-Konversion

1.Fall Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\bar{\wedge}$)-System

Darstellung der $NAND_2$-Funktion durch den $\bar{\wedge}$ Operator:

Problem: Die Operatoren $\bar{\wedge}$ und $\bar{\vee}$ sind nicht assoziativ.

$$(x_1 \bar{\wedge} x_2) \bar{\wedge} x_3 \neq x_1 \bar{\wedge} (x_2 \bar{\wedge} x_3)$$

$$(x_1 \bar{\vee} x_2) \bar{\vee} x_3 \neq x_1 \bar{\vee} (x_2 \bar{\vee} x_3)$$

$$NAND_3(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} = \overline{(x_1 \bar{\wedge} x_2)} \bar{\wedge} x_3$$

$$(x_1 \bar{\wedge} x_2) \bar{\wedge} x_3 = \overline{\overline{x_1 \wedge x_2} \wedge x_3} \neq$$

$$x_1 \bar{\wedge} (x_2 \bar{\wedge} x_3) = \overline{x_1 \wedge \overline{x_2 \wedge x_3}}$$

NAND-Konversion

1.Fall Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System

Um die $NAND_k$-Funktion trotzdem für k > 2 durch $\overline{\wedge}$-Operatoren auszudrücken, geht man wie folgt vor:

1. Die Variablen x_1 bis x_k werden durch den $\overline{\wedge}$-Operator verknüpft: $x_1 \overline{\wedge} \ldots \overline{\wedge} x_k$
2. Auf die linke Seite des Terms werden k-2 offene Klammern "(" und hinter jede Variable außer x_1 und x_k wird jeweils eine geschlossene Klammer ")" gesetzt:

   $(\ldots(x_1 \overline{\wedge} x_2) \ldots \overline{\wedge} x_{k-1}) \overline{\wedge} x_k$
3. Schließlich wird jede Klammerebene negiert:

   $\overline{\overline{\vdots}}$

   $(\ldots(x_1 \overline{\wedge} x_2) \ldots \overline{\wedge} x_{k-1}) \overline{\wedge} x_k$

NAND-Konversion

1.Fall Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System

$$\overline{(x_1 \overline{\wedge} x_2)} \overline{\wedge} x_3 = \overline{\overline{\overline{x_1 \wedge x_2}} \wedge x_3}$$

$$= \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3}$$

$$= \mathrm{NAND}_3(x_1, x_2, x_3)$$

$$\overline{(\overline{(x_1 \overline{\wedge} x_2)} \overline{\wedge} x_3)} \overline{\wedge} x_4 = \overline{\overline{\overline{\overline{x_1 \wedge x_2}} \wedge x_3}} \wedge x_4$$

$$= \overline{\overline{\overline{x_1 \wedge x_2}} \wedge x_3 \wedge x_4}$$

$$= \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4}$$

$$= \mathrm{NAND}_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

2. Fall: Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\vee}$)-System

Gegeben: Boolesche Funktion in disjunktiver Form.

$$y = \overline{a}\, b\, c \vee a\, \overline{b}\, c \vee a\, b\, \overline{c} \vee \overline{a}\, \overline{b}\, \overline{c}$$

Überführung:

1. Die Funktion wird zunächst negiert.
2. Anschließend werden die Konjunktionen doppelt negiert und
3. die DeMorganschen Regeln angewendet.
4. Das Ergebnis muss dann noch negiert werden.

NOR-Konversion

2.Fall: Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\vee}$)-System

$$y = \bar{a}\,b\,c \vee a\,\bar{b}\,c \vee a\,b\,\bar{c} \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$$

$$\bar{y} = \overline{\bar{a}\,b\,c \vee a\,\bar{b}\,c \vee a\,b\,\bar{c} \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}}$$

$$= \overline{\overline{\bar{a}\,b\,c}} \vee \overline{\overline{a\,\bar{b}\,c}} \vee \overline{\overline{a\,b\,\bar{c}}} \vee \overline{\overline{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}}}$$

$$= \overline{\overline{(a \vee \bar{b} \vee \bar{c})} \vee \overline{(\bar{a} \vee b \vee c)} \vee \overline{(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)} \vee \overline{(a \vee b \vee c)}}$$

$$= NOR_4(NOR_3(a, \bar{b}, \bar{c}), NOR_3(\bar{a}, b, \bar{c}), NOR_3(\bar{a}, \bar{b}, c), NOR_3(a, b, c))$$

Die Negation von $\bar{y}$ zu y erhält man mit $y = \bar{y} \;\overline{\vee}\; \bar{y}$.

$$y = \overline{\bar{y} \vee \bar{y}} = NOR_2(\bar{y}, \bar{y})$$

NOR-Konversion

2.Fall: Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\vee}$)-System

Dabei ist $NOR_k(x_1,...,x_k)$ eine k-stellige Funktion, für die gilt:

$$NOR_k(x_1,...,x_k) \begin{cases} 1 \text{ für } x_1 = ... = x_k = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Die NOR_k -Funktion lässt sich ebenfalls ausschließlich mit $\overline{\vee}$ als Operator darstellen.

3. Fall: Funktion in konjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\vee}$)-System

Gegeben: Boolesche Funktion in konjunktiver Form

$$y = (\overline{a} \vee b \vee c)(a \vee \overline{b} \vee c)(a \vee b \vee \overline{c})(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})$$

Überführung:

1. Der Ausdruck wird doppelt negiert.
2. Anschließend wendet man die DeMorgan-Regeln an.

NOR-Konversion

3.Fall: Funktion in konjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\vee}$)-System

$$y = (\overline{a} \vee b \vee c)(a \vee \overline{b} \vee c)(a \vee b \vee \overline{c})(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})$$

$$= \overline{\overline{(\overline{a} \vee b \vee c)(a \vee \overline{b} \vee c)(a \vee b \vee \overline{c})(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})}}$$

$$= \overline{\overline{(\overline{a} \vee b \vee c)} \vee \overline{(a \vee \overline{b} \vee c)} \vee \overline{(a \vee b \vee \overline{c})} \vee \overline{(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})}}$$

$$= NOR_4(NOR_3(\overline{a}, b, c), NOR_3(a, \overline{b}, c), NOR_3(a, b, \overline{c}), NOR_3(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}))$$

4. Fall: Funktion in konjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System

Gegeben: Boolesche Funktion in konjunktiver Form

$$y = (\overline{a} \vee b \vee c)(a \vee \overline{b} \vee c)(a \vee b \vee \overline{c})(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})$$

Überführung:

1. Die Funktion wird negiert.
2. Anschließend werden die Disjunktionen doppelt negiert und
3. die DeMorgan-Regeln angewendet.
4. Das Ergebnis ist dann noch zu negieren.

NAND-Konversion

4.Fall: Funktion in konjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System

$$y = (\overline{a} \vee b \vee c)(a \vee \overline{b} \vee c)(a \vee b \vee \overline{c})(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})$$

$$\overline{y} = \overline{(\overline{a} \vee b \vee c)(a \vee \overline{b} \vee c)(a \vee b \vee \overline{c})(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})}$$

$$= \overline{\overline{(\overline{a} \vee b \vee c)}} \wedge \overline{\overline{(a \vee \overline{b} \vee c)}} \wedge \overline{\overline{(a \vee b \vee \overline{c})}} \wedge \overline{\overline{(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})}}$$

$$= \mathrm{NAND}_4(\mathrm{NAND}_3(a, \overline{b}, \overline{c}), \mathrm{NAND}_3(\overline{a}, b, \overline{c}),$$
$$\mathrm{NAND}_3(\overline{a}, \overline{b}, c), \mathrm{NAND}_3(a, b, c))$$

Die Negation von $\overline{y}$ zu y erhält man auch mit $y = \overline{y} \overline{\wedge} \overline{y}$.

$$y = \overline{\overline{y} \wedge \overline{y}} = \mathrm{NAND}_2(\overline{y}, \overline{y})$$

Entwurf von Schaltnetzen

Freie Universität Berlin

Beim praktischen Entwurf von Schaltnetzen muss beachtet werden, dass reale Gatter keine idealen Verknüpfungen sind, sondern z.B. Verzögerungszeiten besitzen, Wärme abgeben, Platz benötigen, ...

Technische Kriterien

Leistungsaufnahme, Schaltzeit, Platzbedarf, Material, Lebensdauer, ...

Ökonomische Kriterien

Kosten

Entwurf von Schaltnetzen
Technische Kriterien I

Korrekte Realisierung unter Beachtung des statischen und dynamischen Verhaltens der verwendeten Bauelemente

- z.B. Vermeidung von dynamischen Störeffekten, wie Hasards und Wettläufen

Berücksichtigung technischer Beschränkungen, z.B.

- begrenzte Anzahl von Eingängen der verwendeten Logikelemente
- begrenzte Belastbarkeit der Ausgänge der Elemente, Bauelemente-Bibliothek
- ...

Entwurf von Schaltnetzen
Technische Kriterien II

Gewährleistung einer hohen Systemzuverlässigkeit und Verfügbarkeit (leichte Testbarkeit, Selbsttest, Fehlertoleranz),

Berücksichtigung von Forderungen der Gebrauchseigenschaften (z.B. hoher Komfort, hohe Arbeitsgeschwindigkeit, großer Funktionsumfang),

Berücksichtigung technologischer Nebenbedingungen (z.B. Besonderheiten verschiedener Halbleitertechnologien),

Vermeidung von Störeinflüssen durch äußere elektromagnetische Felder.

Entwurf von Schaltnetzen
Ökonomische Kriterien

Geringe Kosten für den Entwurf (Entwurfsaufwand), z.B. Lohnkosten, Kosten für Rechnerbenutzung zur Entwurfsunterstützung,

Geringe Kosten für die Realisierung (Realisierungsaufwand), z.B. Kosten für die eingesetzten Bauelemente (bei der Herstellung integrierter Schaltkreise wird die Realisierung auf einer möglichst kleinen Chipfläche gefordert)

Geringe Kosten für die Inbetriebnahme und den laufenden Betrieb, z.B. Kosten für Test, Wartung und Energie.

Entwurf von Schaltnetzen

Freie Universität Berlin

Grenzen zwischen technischen und ökonomischen Kriterien sind teilweise fließend.

Einzelne Kriterien stehen auch im Widerspruch zueinander.

z.B. Erhöhung der Zuverlässigkeit ⇒ Erhöhung der Kosten
geringere Realisierungskosten ⇒ höhere Entwurfskosten etc.

➔ Aufgabe des Entwerfers besteht darin, für eine bestimmte Problemstellung den günstigsten Kompromiss zu finden.

Ziel des Entwurfs: Unter Einhaltung bestimmter technischer Kriterien vor allem einen günstigen Kompromiss bezüglich der ökonomischen Kriterien anzustreben, um so zu einem Minimum an Gesamtkosten zu gelangen.

Minimierungsverfahren

Grundlage:

Realisierung der Schaltnetze in zweistufiger Form (DF, KF)

Darstellungsform, deren Realisierung die geringsten Kosten verursacht:

Minimalform

Den Vorgang der Erzeugung einer Minimalform bezeichnet man als Minimierung.

Minimierungsverfahren

Freie Universität Berlin

Es gibt drei Arten von Minimierungsverfahren:

- Algebraische Verfahren
- Graphische Verfahren
- Tabellarische Verfahren

Algebraische und graphische Verfahren eignen sich nur für Funktionen mit bis zu 5 oder 6 Variablen, danach werden sie zu unübersichtlich.

Bei größerer Variablenzahl wendet man besser tabellarische Verfahren an.